

はじめに

月刊「大学への数学」の増刊号として、2002年から『合否を分けたこの1題』を刊行して来ました。

その増刊号の特徴は、

- 大学（学部）ごとに、その年の「合否を分けたこの1題」を厳選
- 入試突破に必要なレベルが分かり、今後の勉強の指針となる
- 問題ごとに、それを解くのに必要な手法や定理などを詳しく説明、問題によってはその背景や周辺の話題、類題も解説

です。

その過去3年分の増刊号で取り上げた問題をまとめて書籍にしたものが本書「この問題が合否を決める！2010～2012年入試」です。「07～09年入試」版に続いて第3弾です。過去3年分について同じようなテーマの重複をなくし、68題を精選しました。

本書の特徴は、

- 最近の入試傾向に沿った“重要問題”に一通りあたることができる
- どの問題からも始められる
- 1題1題詳しい解説がしてある

とまとめることができるでしょう。

（なお、原則として、本書の解説は、増刊号をそのまま転載しています。「なぜこの1題か」も出題当時に書かれたものです。出題年度を表示するなどはしていません。）

本書で取り上げる問題は、やや程度の高い、入試の典型問題、融合問題、総合問題です。

この本では、次のような使い方を想定しています。入試の標準問題にほぼ一通りあたった人、たとえば、

- 「1対1対応の演習」シリーズや、「新数学スタンダード演習」「数学ⅢCスタンダード演習」

をほぼ終えた人が、

さらなるレベルアップを図る

あるいは

総仕上げのために用いる

などです。

また、本書の問題編は、原則として

見た目の分野で分類

（複数の分野にまたがるときは主要な1つ）

したので、分類のタイトルがヒントになることはなく、実戦的な演習をするのに最適です。

見ただけで分類したので、たとえば「座標」の問題を解くにも、場合によっては、数ⅢCの知識が必要になることもあります。数ⅢCが必要でない問題を解きたいという場合もあるでしょうから、p.4に文系範囲（数ⅠAⅡB）の問題を一覧表にまとめておきました。

いろいろな使い方に配慮した本書で、より実戦力をつけていって下さい。また、今年の増刊号『合否を分けたこの1題』（7月末日発売予定）とは問題が重複していない（入試年度が違う）ので、併せて活用すると、より効果的でしょう。

本書の構成と利用法

本書の対象者などは、前頁で述べました。次に、本書の構成などを説明しましょう。本書は大きく問題編（p.5～29）と解説編（p.31～231）に分かれています。本書で使う記号については、p.4にまとめました。

○問題編

見だめの分野で分類しました。その分類のタイトルが解く上でのヒントとなることはほとんどありませんので、実戦的な演習をするのに最適です。文系範囲の問題の一覧がp.4にあります。

○解説編

問題文の右上に、その年のセットがどのようなものであったか分かるように、各問の難易、目標時間、分野をまとめたものを掲載しました。また、取り上げた問題の番号を⑥、それ以外を①のように表しました。

* * *

「なぜこの1題か」：その問題が合否を分けた1題となっている理由を書いています。入試傾向の分析などについての情報を盛り込んでいる場合もあります。最後に、その問題について、何分くらいで解いたらよいかなどの「目標」をコメントしています。

「解答」：実際の答案ではこの程度で十分と思われる詳しく書いていますが、その行間等を補うために解答の右側に傍注として、なぜそのような解法をとったのか、あるいは使った定理、公式などの補足、また、どんな計算や工夫をしているのか、などの説明を加えました。

「解説」：その問題を解くのに必要な手法や定理をここで詳しく説明しました。また、問題によってはその背景や周辺の話、類題にも踏み込みました。

「受験報告」：これは、実際に入試を受けてこれ「大学への数学」の読者のみなさんから届いた手紙なからこの1題として取り上げた問題を中心に紹介したのです。試験においてどう解いたのか、またどのくらいの時間がかかったのか、出来具合はどのようであったかなどが書かれています。大半が試験当日、あるいは日に書かれた生々しいものであり、非常に参考になるとが多いはずで

○本書で学習するにあたって

普段の学習での問題演習においては、その分野の理が目標であるので、解答にかかった時間をあまり気にすることはありません。しかし、本書で、合否を分けたどうかをテーマにして学習する場合は、実際の試験を定めて、とりあえず30分でできるだけ多く得点できるような解き方をして下さい。さらに、完答するのにどれだけかかったかをメモしておきましょう。なお、「なぜこの1題か」の「目標」のところ時間にコメントのある場合もあります。時間を意識して演習することで、より志望大学のレベルが分かり、今後の勉強の指となるでしょう。

* * *

以上の方法を入試直前期に行えば、かなり実戦的で効果的な演習となることでしょう。

大学への数学

この問題が 合否を決める!

2010~2012年入試

CONTENTS

| | | |
|-----------|-------|----|
| はじめに | 坪田三千雄 | 1 |
| 本書の構成と利用法 | 坪田三千雄 | 2 |
| 問題編 | | 5 |
| 解説編 | | 31 |

掲載校一覧(解説編)

| | | | |
|----------------|-----------------|------------------|------------------|
| 北大・理系 12年…… 32 | 医科歯科大 11年…… 80 | 金沢大・理系11年…… 132 | 阪大・文系 10年…… 174 |
| 11年…… 36 | 横浜市大・医10年…… 84 | 信州大・医 12年…… 135 | 阪大・理系 10年…… 176 |
| 東北大・理系12年…… 40 | 11年…… 88 | 11年…… 138 | 阪府大・工 10年…… 179 |
| 11年…… 44 | 上智大・理工10年…… 91 | 名大・理系 12年…… 140 | 12年…… 182 |
| 筑波大・医系10年…… 48 | 11年…… 94 | 11年…… 142 | 神戸大・理系12年…… 185 |
| 11年…… 50 | 防衛医大 11年…… 98 | 京大・文系 12年…… 144 | 11年…… 188 |
| 千葉大・医薬12年…… 53 | 慈恵医大 11年…… 100 | 11年…… 146 | 10年…… 192 |
| 11年…… 56 | 日本医大 10年…… 103 | 京大・理系 12年…… 148 | 岡山大・理系12年…… 195 |
| 10年…… 59 | 慶大・理工 12年…… 106 | 10年…… 150 | 広島大・理系11年…… 198 |
| 東大・文系 10年…… 62 | 慶大・医 11年…… 109 | 京都府医大 10年…… 153 | 10年…… 202 |
| 東大・理系 10年…… 64 | 慶大・薬 10年…… 112 | 12年…… 156 | 熊本大・医 11年…… 205 |
| 一橋大 12年…… 66 | 12年…… 115 | 京都薬大 10年…… 158 | 九大・理系 12年…… 208 |
| 11年…… 68 | 早大・理工系10年…… 118 | 同志社大・理系11年…… 162 | 11年…… 212 |
| 10年…… 70 | 早大・政経 12年…… 121 | 近畿大・医 12年…… 164 | 産業医大 12年…… 216 |
| 東工大 12年…… 72 | 山梨大・医 12年…… 124 | 10年…… 166 | 10年…… 220 |
| 11年…… 74 | 11年…… 126 | 大阪医大 12年…… 169 | 徳島大・医歯薬11年…… 224 |
| 10年…… 76 | 新潟大・医歯11年…… 130 | 10年…… 172 | 10年…… 228 |

本書で使う記号の説明など

◇問題の右側の枠囲みについて

一番上に、解説編の頁(太字が解答の頁)を、その下に小社の刊行物に掲載されている類題を紹介した(2013年に発売されている本の頁を紹介)。

なお、書名は以下のように略称した。

| | |
|-------------------------|--------|
| 「入試数学基礎演習」 | 基礎演 |
| 「新数学スタンダード演習」 | 新スタ |
| 「数学ⅢCスタンダード演習」 | ⅢCスタ |
| 「新数学演習」 | 新数演 |
| 「解法の探求・微積分」 | 解探微積 |
| 「解法の探求・確率」 | 解探確率 |
| 「センター必勝マニュアル数学ⅠA」 | 必マニⅠ |
| 「センター必勝マニュアル数学ⅡB」 | 必マニⅡ |
| 「1対1対応の演習」シリーズ | 1対1 |
| [新訂版の場合は(新訂版 p.8)などと表記] | |
| 「教科書 Next ベクトルの集中講義」 | ベクトル |
| 「教科書 Next 数列の集中講義」 | 数列 |
| 「教科書 Next 図形と方程式の集中講義」 | 図形と方程式 |
| 「教科書 Next 三角比と図形の集中講義」 | 三角比 |
| 「マスター・オブ・整数」 | 整数 |
| 「マスター・オブ・場合の数」 | 場合の数 |
| 「微積分・基礎の極意」 | 極意 |
| 「数学を決める論証力」 | 論証力 |
| 「ハッとめざめる確率」 | ハッ確 |
| 「解法の突破口」 | 突破 |
| 「数学ショートプログラム」 | ショート |
| 「難関大入試数学・解決へのアプローチ」 | アプローチ |
| 「ちょっと差がつくうまい解法」 | うまい |
| 「東大数学で1点でも多く取る方法」 | 東大理系 |
| 理系編 [増補版] | 東大理系 |
| 「東大数学で1点でも多く取る方法」 | 東大文系 |
| 文系編 [増補版] | 東大文系 |
| 「入試の軌跡」シリーズ | 軌跡 |

◇解説編の記号について

・問題文の右上で使っている記号(C**など)

問題の難易は、入試問題を10段階に分けたとして、

A(基本)…5以下, B(標準)…6, 7,

C(発展)…8, 9, D(難問)…10

目標時間は*1つにつき10分, ○は5分である。平均的な難関校志望者が入試直前期において、自分の力を出しきれた場合を基準にしている。

分野は、Ⅰ…数Ⅰ, Ⅱ…数Ⅱ, Ⅲ…数Ⅲ, A…数A, B…数B, C…数Cである。

例えば、「① B** B/ベクトル」とあれば、標準問題で目標時間は20分、数学Bのベクトルの問題であることを意味する。

・解答・解説で現れる記号

解答の(難問)などにつけた☆, ★について、

☆ 巧妙であるが、ぜひ身につけて欲しい解法

★ 相当に巧妙で、思いつかなくても心配のいらぬ解法

次に、主に解答の最後にある注意事項について、

⇨注 すべての人のためのもの

⇒注 意欲的な人のためのもの

◇受験報告の出来具合について

○…完答(のつもり)

△…半答(のつもり)

×…誤答・手つかず・ほぼダメ

文系範囲(数ⅠAⅡB)の問題一覧

問題編の頁を紹介する。

場合の数

11 防衛医大 ……………6

確率

12 早大・政経, 10 神戸大・理系 ……………6

11 広島大・理系, 10 阪大・理系(③まで) ……………7

12 阪府大・工, 12 千葉大・医, 薬, 理, 工 ……………8

図形

10 京大・理系, 12 京大・文系 ……………8

ベクトル

11 千葉大・医, 薬, 理, 工, 10 京都薬大 ……………9

10 慶大・薬, 11 京大・文系, 12 大阪医大 ……………10

10 上智・理工, 10 日本医大(②まで) ……………11

整数

10 広島大・理系, 12 一橋大 ……………12

11 新潟大・医, 歯, 12 山梨大・医 ……………12

10 東大・理系, 10 京都府医大 ……………13

数列

10 近大・医, 12 慶大・理工 ……………14

11 九大・理系 ……………15

方程式

12 近大・医 ……………15

関数

12 京大・理系 ……………16

座標

10 東大・文系, 11 東工大 ……………16

10 千葉大・医, 薬, 理, 工, 11 神戸大・理系 ……………17

11 筑波大・医, 11 東北大・理系 ……………17

微分・積分(数Ⅱ)

10 筑波大・医, 11 一橋大 ……………18

10 阪大・文系, 12 名大・理系 ……………18

12 慶大・薬, 10 一橋大 ……………19

小問セット

11 信州大・医(1) ……………28

10 産業医大(1)(2)(8) ……………29

場合の数・確率

○11 防衛医科大学校

0, 1, 2, 3, 4, 5の6つの数字を重複せずに用いて, n 桁の整数を作る ($n \leq 6$). このとき, 以下の間に答えよ.

- (1) $n=3$, すなわち3桁の整数で, 隣り合う数字の和がどれも5にならないような整数はいくつできるか.
- (2) $n=4$, すなわち4桁の整数で, 隣り合う数字の和がどれも3にならないような整数はいくつできるか.
- (3) $n=4$, すなわち4桁の整数で, 隣り合う数字の和が5になる箇所が2つあるような整数をすべて加えるといくらになるか.

p.98

1対1 A p.28
(新訂版 p.8)
場合の数 p.12
研究問題3

○12 早稲田大学・政治経済学部

ある競技の大会に, チーム1, チーム2, チーム3, チーム4が参加している. 大会は予選と決勝戦からなる. まず, 抽選によって, 図のように2チームずつに分かれて予選を行う. 次に, 各予選の勝者が決勝戦を行う. 過去の対戦成績から次のことが分かっている.

チーム i とチーム j ($1 \leq i < j \leq 4$) が試合をするとき, 確率 p でチーム j が勝利し, 確率 $1-p$ でチーム i が勝利する. ただし $0 < p < 1$ である.



このとき, 次の各問に答えよ. ただし, (1), (2), (3)は答のみ解答欄に記入せよ.

- (1) チーム1が優勝する確率を求めよ.
- (2) 予選においてチーム1とチーム2が対戦する確率を求めよ.
- (3) 予選においてチーム1とチーム2が対戦するとき, チーム2が優勝する確率を求めよ.
- (4) この大会においてチーム2が優勝する確率 $f(p)$ を求めよ.
- (5) $f(p)$ を最大にする p の値を求めよ.

p.121

新数演 6・7

○10 神戸大学・理系 (前期)

N を自然数とする. 赤いカード2枚と白いカード N 枚が入っている袋から無作為にカードを1枚ずつ取り出して並べていくゲームをする. 2枚目の赤いカードが取り出された時点でゲームは終了する. 赤いカードが最初に取り出されるまでに取り出された白いカードの枚数を X とし, ゲーム終了時までに取り出された白いカードの総数を Y とする. このとき, 以下の間に答えよ.

- (1) $n=0, 1, \dots, N$ に対して, $X=n$ となる確率 p_n を求めよ.
- (2) X の期待値を求めよ.
- (3) $n=0, 1, \dots, N$ に対して, $Y=n$ となる確率 q_n を求めよ.

p.192

新スタ 5・4

- ①(1) B* I II/整数(方程式)
- (2) B* II/式の計算, 複素数
- (3) C* III/微分法(逆関数)
- ② B*** A/場合の数
- ③ B*** B/ベクトル(空間座標, 円, 軌跡)
- ④ C*** B II III/数列, 対数, 積分法

0, 1, 2, 3, 4, 5の6つの数字を重複せずに用いて、 n 桁の整数を作る ($n \leq 6$)。このとき、以下の問に答えよ。

(1) $n=3$, すなわち3桁の整数で、隣り合う数字の和がどれも5にならないような整数はいくつできるか。

(2) $n=4$, すなわち4桁の整数で、隣り合う数字の和がどれも3にならないような整数はいくつできるか。

(3) $n=4$, すなわち4桁の整数で、隣り合う数字の和が5になる箇所が2つあるような整数をすべて加えるといくらになるか。 (11)

なぜこの1題か

①は、小問集合。(1)式と計算・整数(2)複素数(3)逆関数の2次導関数。防衛医大の受験者層を考えると、3問とも完答したいところだ。

②は、場合の数の問題。コンビネーションを駆使して解けるような問題ではない。余事象を利用するにしても、手を汚さなければ解答に辿り着けないかなり泥臭いタイプの数え上げである。(1), (2)は解答欄を埋めても、(3)は放棄した人が多い。受験報告では○でも、あっているとは限らないのが場合の数の問題である。

③は、空間座標の問題。ノーヒントであれば、逆手

流を用いるところだが…。ここでは異なる誘導がついている。決してうまい解き方ではない。

④は、数列の和を積分で評価する問題。(1), (2)は簡単だが、見慣れない問題なので、あらぬ方向に手が進んでしまう人も見受けられた。最後の問題ということもあって、(3)が解答できた人は少ない。

丁寧に数え上げればなんとかなる②で、できる限り得点を確保して合格を引き寄せたい。

【目標】 (1)5分, (2)12分, (3)書き出す覚悟を決めてから、8分。

解答

(1), (2) 余事象を用いて数え上げる。(1)は、和が5になる組 {0, 5}, {1, 4}, {2, 3}, (2)は、和が3になる組 {0, 3}, {1, 2} がどこにあるかによって場合分けする。(2)ではダブルカウントしているものを引き忘れないように。(3) 全てを書き出して、各桁ごとに計算するのが簡単。

(1) 0, 1, 2, 3, 4, 5を重複せずに用いてできる3桁の数の個数は、百の位は1~5の5通り、十の位は残り5個の中から選ぶので5通り、一の位は残り4個の中から選ぶので4通り。全部で、 $5 \times 5 \times 4 = 100$ (通り)

次に、隣り合う数字の和が少なくともひとつ5になるような整数を数え上げる。各桁の数字は異なるので、3桁の場合隣り合う数字の和が5になるのは1か所のみ。和が5になる組は {0, 5}, {1, 4}, {2, 3} だけ。

| | | | |
|-----|----------------|-----|----------------|
| 50* | *について ↓ | *05 | } タイプ 2×4=8通り |
| 14* | | *50 | |
| 41* | } タイプ 5×4=20通り | *14 | } タイプ 4×3=12通り |
| 23* | | *41 | |
| 32* | | *23 | |
| | | *32 | |

よって、答えは、 $100 - (20 + 8 + 12) = 60$ (通り)

同じ数を2回以上用いないので、
 ⇨ (千位)+(百位)=(百位)+(十位)
 (百位)+(十位)=(十位)+(一位)
 とはならない。

条件を外して数え上げ、あとから条件に合わないものの個数を引く。余事象の利用。

なお、(1)は次のように一発で数えることもできる。

百の位の選び方は1~5の通り。百の位を a とすると、十の位の選び方は、 a と $5-a$ 以外の数から選ぶので4通り。十の位を b とすると、一の位の選び方は、 $a, b, 5-b$ 以外の数から選べるので3通り。よって、 $5 \times 4 \times 3 = 60$ (通り)

⇨ *14は1, 4以外の4つのうち、先頭には0が来れないので3通り。

(2) 0, 1, 2, 3, 4, 5を重複せずに用いてできる4桁の数の個数は、千の位で1~5の5通り、百の位は残り5個の中から選ぶので5通り、十の位は残り4個の中から選ぶので4通り、一の位は残り3個の中から選ぶので3通り、よって、全部で、 $5 \times 5 \times 4 \times 3 = 300$ (通り)

次に、隣り合う数字の和が少なくともひとつ3になるような整数を数え上げる。和が3になる組は、{0, 3}, {1, 2} だけ。

(ア) {0, 3} が隣り合う (イ) {1, 2} が隣り合う

$$\left. \begin{array}{l} 30** \\ *30* \\ *03* \\ **30 \\ **03 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{** について} \\ 5 \times 4 \times 3 = 60 \text{ 通り} \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} 12** \\ 21** \\ *12* \\ *21* \\ **12 \\ **21 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 2 \times 4 \times 3 = 24 \text{ 通り} \\ 4 \times 3 \times 3 = 36 \text{ 通り} \end{array}$$

千の位には、3, 4, 5の3通り、残りの・は3通りなので、全部で、 $4 \times 3 \times 3$ (通り)

(ウ) {0, 3}, {1, 2} がともに隣り合う

$$\left. \begin{array}{l} 3012 \quad 1203 \quad 2103 \\ 3021 \quad 1230 \quad 2130 \end{array} \right\} \text{の6通り}$$

よって、求める個数は、

$$300 - (60 + 24 + 36 - 6) = 186 \text{ (通り)}$$

(3) 隣り合う数字の和が5になる箇所が2つあるとき、それらは、千の位と百の位、十の位と一の位。数字を重複して用いることはできないので、百の位と十の位の和が5のときは、千の位と百の位の和、十の位と一の位の和はともに5にならない。和が5になる組は {0, 5}, {1, 4}, {2, 3}。書き出すと、

5014 1405 4105 2305 3205
 5041 1450 4150 2350 3250
 5023 1423 4123 2314 3214
 5032 1432 4132 2341 3241

千の位は、1~5が4個ずつ、百の位は0~4が4個ずつ

十の位は、1~4が3個ずつ、0, 5が4個ずつ

一の位は、十の位と同じ

よって、総和は、

$$(1+2+3+4+5) \times 4 \times 1000 + (0+1+2+3+4) \times 4 \times 100 + ((1+2+3+4) \times 3 + (0+5) \times 4) \times (10+1) = 64550$$

解説 (受験報告は p.134)

【(2)の別解】

どの桁とどの桁で和が3になるかで場合分けすると次のようになる。

別解 千位をa, 百位をb, 十位をc, 一位をdとおく。

条件を無視すると、全部で、 $5 \times 5 \cdot 4 \cdot 3 = 300$ 通り。

• $a+b=3$ となるものは、

$(a, b) = (1, 2), (2, 1), (3, 0)$ それぞれに対して c, d の組は 4・3 通りあるから、 $3 \times 4 \cdot 3 = 36$ 通り。

• $b+c=3$ となるものは、

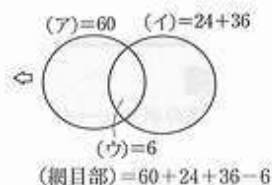
$(b, c) = (0, 3), (3, 0)$ のとき a, d の組は 4・3 通り

$(b, c) = (1, 2), (2, 1)$ のとき a, d の組は 3・3 通りあるから、全部で $2 \times 4 \cdot 3 + 2 \times 3 \cdot 3 = 42$ 通り。

• $c+d=3$ となるものは、同様に 42 通り。

以上では $a+b=3$ かつ $c+d=3$ となるものが重複する。それは、1203, 1230, 2103, 2130, 3012, 3021 の 6 通り。よって答えは $300 - (36 + 42 + 42 - 6) = 186$ 通り。

(石井)



ある競技の大会に、チーム1、チーム2、チーム3、チーム4が参加している。大会は予選と決勝戦からなる。まず、抽選によって、図のように2チームずつに分かれて予選を行う。次に、各予選の勝者が決勝戦を行う。過去の対戦成績から次のことが分かっている。

チーム*i*とチーム*j* ($1 \leq i < j \leq 4$) が試合をするとき、
確率*p*でチーム*j*が勝利し、確率 $1-p$ でチーム*i*が勝利する。ただし $0 < p < 1$ である。



このとき、次の各問に答えよ。ただし、(1)、(2)、(3)は答のみ解答欄に記入せよ。

- (1) チーム1が優勝する確率を求めよ。
 - (2) 予選においてチーム1とチーム2が対戦する確率を求めよ。
 - (3) 予選においてチーム1とチーム2が対戦するとき、チーム2が優勝する確率を求めよ。
 - (4) この大会においてチーム2が優勝する確率 $f(p)$ を求めよ。
 - (5) $f(p)$ を最大にする*p*の値を求めよ。
- (12)

なぜこの1題か

05年から昨年までは大問が4題であったが、今年は3題になった。代わりに小問が増えた。昨年は2年ぶりに整数、しかも証明問題が出されたが、今年は整数も証明も出されなかった。

さて、今年の問題を見て行こう。①は円に関するBレベルの問題である。②は頻出の確率、微分との融合問題になっている。③はベクトルで与えられた点の軌跡の問題。複数の文字が現れる。計算量が多めのCレベルの問題である。

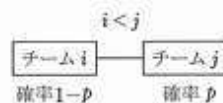
60分という時間的に厳しいセットである。①は比較的短時間にクリアしやすい。②と③が鍵を握る。③を先に手をつけたとしても、計算量が多めなので、多くの人は③を完答せずに②に手をつけたはずである。本学で頻出の確率は対策を十分してきた人が多いはずとなると、②の確率でどこまで点数を稼げたかで、合否が分かれたと考えられる。

【目標】 時間との勝負になるだろう。(3)まで確保した上で、さらに上積みできればよいだろう。

解答

- (1) チーム1が2連勝するときである。
- (2) チーム1がチーム2と対戦する確率と、チーム3やチーム4と対戦する確率が違うはずはない。
- (4) チーム2がどのチームと予選で対戦するか?と、決勝戦の相手はどのチームか?の2種類を考えることに注意する。

⇨ 対等性に着目する。

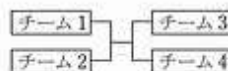


(1) 相手によらずに予選、決勝戦とも、確率 $1-p$ で勝たなければならないので、 $(1-p)^2$

(2) どのチームがチーム1の対戦相手になるかは同様に確からしいので、

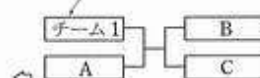
求める確率は $\frac{1}{3}$

(3) 右図のとき、チーム2が優勝するのは、予選では確率*p*でチーム1に勝ち、決勝戦では残りの2チームのどちらかが対戦相手でも



確率 $1-p$ で勝つときなので、求める確率は、 $p \cdot (1-p) = p(1-p)$

⇨ こうしてよくて、



⇨ チーム2がA、B、Cのどこに入るかは同様に確からしい、と考えてもよい。

チーム3とチーム4の対戦結果は考慮する必要はない。

(4) チーム2が予選でチーム1, チーム3, チーム4と対戦する確率は
いずれも $\frac{1}{3}$ である.

1° チーム2が予選でチーム1と対戦し, かつチーム2が優勝するとき,

(3)により, $\frac{1}{3}p(1-p)$ ①

2° チーム2が, 予選でチーム3に勝って優勝するときは, 決勝戦の対戦表は下図1, 2の場合である.



• チーム2が, 図1で優勝するとき, もう一方の予選でチーム1は確率 $1-p$ で勝つから, $\frac{1}{3}(1-p) \cdot (1-p) \cdot p = \frac{1}{3}p(1-p)^2$ ②

• チーム2が, 図2で優勝するとき, もう一方の予選でチーム4は確率 p で勝つから, $\frac{1}{3}(1-p) \cdot p \cdot (1-p) = \frac{1}{3}p(1-p)^2$ ③

3° チーム2が予選でチーム4に勝って優勝するときは, 上図でチーム3とチーム4を入れ替えた場合なので, このときの確率も②③に等しい.

以上, 1°~3°により, $f(p) = ① + 2 \times (② + ③)$ であるから,

$$f(p) = \frac{1}{3}p(1-p) + \frac{4}{3}p(1-p)^2 = \frac{4}{3}p^3 - 3p^2 + \frac{5}{3}p$$

(5) $f'(p) = 4p^2 - 6p + \frac{5}{3} = \frac{1}{3}(12p^2 - 18p + 5)$

ここで, $12p^2 - 18p + 5 = 0$ となる $p = p_0$ ($0 < p_0 < 1$) は,

$$p_0 = \frac{9 - \sqrt{9^2 - 12 \times 5}}{12} = \frac{9 - \sqrt{21}}{12}$$

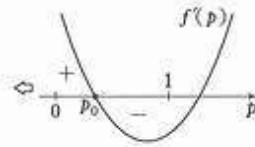
であり, $f(p)$ の増減表は右のようにな

るので, 求める p の値は, $p_0 = \frac{9 - \sqrt{21}}{12}$

| | | | |
|---------|-----|-------|-----|
| p | (0) | p_0 | (1) |
| $f'(p)$ | | + | - |
| $f(p)$ | | ↗ | ↘ |

⇨ チーム2にとって
チーム3とチーム4は対等
チーム1にとって
チーム3とチーム4は対等

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \frac{1}{3}p(1-p) &= -\frac{1}{3}p^2 + \frac{1}{3}p \\ \frac{4}{3}p(1-p)^2 &= \frac{4}{3}p^3 - \frac{8}{3}p^2 + \frac{4}{3}p \end{aligned}$$



解説

【(4)で答えのチェック】

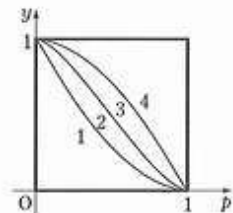
実際には取らない値であるが, $p=0, 1$ のとき, チーム2には, いずれの場合も「絶対に勝てないチーム」があるので, $f(0) = f(1) = 0$ である. このようにして, ケアレスミスをチェックできる.

【各チームが優勝する確率】

チーム4は(1)と同様にして, チーム3は(4)と同様にして計算することにより, 各チームが優勝する確率 $P_1 \sim P_4$ は

$$\begin{aligned} P_1 &= (1-p)^2 \\ P_2 &= \frac{4}{3}p^3 - 3p^2 + \frac{5}{3}p \\ P_3 &= -\frac{4}{3}p^3 + p^2 + \frac{1}{3}p \\ P_4 &= p^2 \end{aligned}$$

となる. 右図は, 太枠の正方



形を, 曲線 $y = P_1, y = P_1 + P_2, y = P_1 + P_2 + P_3$

で4つに分けた図で, 各部分の面積は, p を $0 \leq p \leq 1$ においてたがために選ぶとき, 各チームが優勝する確率を表す(数Cの範囲).