はじめに

望月俊昭

ノーベル賞には数学賞がなく，数学賞として有名な賞としては，フィールズ賞，アーベル賞，ガウス賞などがある．このうちアーベル賞は，「毎年授与される」，「年齢制限なし」，「業績に対する評価」，「高額賞金(約1億円)」などの点で，ノーベル賞に性格が似ている．

これに対しフィールズ賞(1936年スタート)は数学賞の最高権威との評価が高いが，「4年に一度」，「40歳未満」，「業績でなく人物に対する賞」，「少額賞金(100～200万円)」という点で，ノーベル賞，アーベル賞とは，性格がかなりちがう．あのフェルマーの最終定理を証明したアンドリュー・ワイルズも40歳をわずかに超えていたためフィールズ賞を手にしていない．

業績に対する賞で年齢制限がないノーベル賞では70～80歳代での受賞ということも稀ではない．米国のノーベル賞科学部門3賞の受賞者合計は200人を超えているが，フィールズ賞受賞者は13名しかいない．

4年に一度，4名まで，しかも40歳未満だけに与えられるという点からすれば，フィールズ賞受賞者が天才数学者でなければ誰が天才数学者か，と思うのは私だけではないだろう．
ところが，である．日本のフィールズ賞受賞者3名のうちの1人，広中平祐はこう言う．

> つくづく世界は広いと感じる．私は二十六歳で，米国のマサチューセッツ州ケンブリッジにあるハーバード大学に留学してから今日まで，世界のあちこちで，おおげさではなく思わず寒気さえ覚えたほどの天才を何人か，この目にした．…広いこの世界には天才がひしめいているのだ．
>
> (広中平祐『生きること学ぶこと』集英社文庫)

広い世界には天才が実在するが，自分は天才ではない，という思いが彼にはある．小学生を前にした15分あまりの講演で＜私のことを抜群の才能とか，頭脳明晰といってくれるのは嬉しいのですが，それは違う．広中平祐は抜群の努力家だというだけです＞と興奮気味に口にしたことを振り返る．

> 私という人間のことを一番よく知っているのは誰か．私自身である．その私自身から素直に見る私は，とび抜けた才能をもっているわけではない．私はそのかわり，努力することにかけては絶対の自信がある．あるいは最後までやりぬく根気にかけては，決して人に負けないつもりでいる．…「努力」とは私においては，人以上に時間をかけることと同義なのである．
>
> (同上)

我々凡人から見て天才としか言いようのない広中平祐の＜努力とは人以上に時間をかけること＞という言葉は，ズシリと重い．

うまくいかないのは…，できないのは…，と弁解を口にする暇があったら努力せよと叱られているような気がする．

数学者広中平祐の重い言葉を共にかみしめたところで，受験生諸君に一つだけこれに加えたい．それは，方法を磨く，ということだ．

受験生は，限られた時間の中で学んでいく．その学びの時間は，必死でない他人の2倍は可能かもしれないが，必死で取り組むライバルの2倍はおろか1.5倍さえも不可能である．

今から変えられない才能と限られた勉強時間という制約の中で，ライバルとの差をつける唯一の要素，それは，学びの質である．

学びの質を向上させる工夫をおこたらないこと．

自分はこういう方法で学ぶのだ，という自分流勉強法を意識した学びこそが，本当の力をつけるための真の学びではないだろうか．

本書の利用法

前置きその1

◇この本は，高校受験で志望校合格をめざしている人を対象にして，受験数学の基本・応用レベルのポイントを整理したものです．

◇本書を手にして，知らないことが多いと感じる人と，知っていることが多いと感じる人がいるはずです．
また，同じ人でも，手にする時期によってその印象は大きくちがうことになります．また，手にする時期だけでなく，それまでの学習内容(範囲，難易度なども含め)のちがい，塾に通っているか否か，通っているとして，その塾が集団指導か個別指導か，など．さらに，学校や塾で受ける授業が，数学の重要事項や解法のポイントを強調してくれる授業であるか否かなど，受験生をとりまく環境は大きくちがいます．

◇1冊の受験参考書や問題集がすべての受験生に同じように役立つわけではない，というのと同様，本書の効用は様々で，本書の利用法も様々…と思います．

前置きその2

◇数や図形に関する基本事項を知らなかったり忘れていれば，思考力は役立ちません．また，解法のツールもあいまいでは入試では使い物になりません．

◇解法のツールを蓄積していくときに大事なのは，使えるように蓄積する，ということです．何冊もあるノートや膨大なプリントの中に埋もれていては意味がありません．＜必要なときにサッと取り出せる＞ようにためていくことが不可欠です．

◇では，必要なときにサッと取り出すためには，どうすればよいか．たくさんの小箱を，すぐ取り出せるように大きな箱に収納するときに人はどんな工夫をするか，ポイントは，何によって瞬時に見分けるのか，ということです．

① つけられた名前から，見分ける．

② 大きさ・形・色などから，見分ける．

などが基本となります．
これを，受験数学の重要事項の整理にいかに活用するか，です．

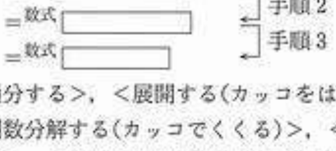
前置きその3

◇図形分野の問題の多くは，問題文中の図形がどのような性質をもっているかを見抜くことが，問題解決への最初のステップになります．
補助線を引かなければならない問題はもちろんのこと，補助線不要の問題においても，合同な三角形や相似な三角形を見て取れなければ一歩も先へ進めません．

◇これに対し，数式分野の問題の多くは，一つ一つ操作を重ねて先へ進む問題が大半です．
平方根や2次方程式の応用問題に接して，最初に何をしたらよいか見当がつかない，という問題はほとんどありません．
受験数学は，図形分野であれ数式分野であれ，

＜こういうときはこうする＞

という手順によって成り立っているといえます．そして，数式分野の問題に対する解答は，図形分野の問題に対する解答に比べると，＜こういうときはこうする＞という手順そのものである色彩が強いはずです．



＜通分する＞，＜展開する(カッコをはずす)＞，＜因数分解する(カッコでくくる)＞，＜おきかえをする＞，＜分母の有理化をする＞などの基本手順など，また＜条件式を変形する＞，＜求値式を因数分解する＞，＜平方の差をつくる＞，＜基本対称式で表す＞などの応用手順を経て，与えられた式や条件から求めるべき関係式や値へと進んでいきます．
既に学習した＜こういうときはこうする＞という手順どおりに進めていくことができればよいわけです．

◇最終段階に向かう進むべき方向をまちがえないこと，そして，各段階でミスなく操作して次のステップへ進んでいくこと，これが，が不可欠です．

本書を使うにあたって

◇本書の活用のポイントについて

〔その1〕 基本事項を確認する．

〔その2〕 手順を確認にする．

〔1〕 何をすべきかを決定する基本事項

例）「互いに素」

「$\sqrt{6}$ の小数部分」など

問題を解き進めるための前提となる基本事項は常に確認すべきです．必要性を感じたものについては，マーカーなどでチェック(線を引く，枠で囲む，近くに自分の文字を書き添える)してください．

〔2〕 次のステップへ進むための手順

例）「x について整理する」

「両辺を2乗する」など

目の前の条件式や関係式などにどのような操作を加えて次の段階へと進むかという手順を，確実に自分のものにする必要があります．

基本事項および操作手順が完全に頭に入るまで，どのようなスタイルであれ，見た瞬間に「あっ，そうだった！」と目で確認できるように整理しておくべきでしょう．

◇自分専用にチューンアップする

☞チューンアップ … 手を加えて性能をよくする

（例1）

工夫その1 符号を逆にして
工夫その2 たし算をする

⇩

工夫その1 符号を逆にして
工夫その2 たし算をする

太目のマーカーで 外枠をつける

（例2）

最低次数の 1文字で整理して

⇩

最低次数の 1文字で整理して

本書の文字や解法のポイントなどは黒の単色で，カラー刷りではありません．みなさんが自分で必要に応じて色をつけてください．

自分用チューンアップのポイントは――――，

＜これぞポイント中のポイントだ＞

と感じた事柄を…，

⇨ 枠に太目のマーカーで色をつける

⇨ 文字で示されたポイントを強調する

自分にとって必要と感じた事柄については，次回ハンドブックを開いたときに目にパッと飛び込んでくるように手を加え，自分専用の数学ハンドブックへと改良してください．

⇒書き込むときの文字の工夫

本書では，上付き文字・下付き文字を多用しています．みなさんも，ぜひ使ってください．

（例） 相似がテーマの基本図形
↑
上付き文字

⇒付箋(ふせん)をつける工夫

自分にとっての重要度によって，付箋の貼り方を変える．

決定的に重要 … はみ出しを長め

それなりに重要 … はみ出しを短め（など）

⇒マーカーを使う工夫

自分にとっての重要度　最大 → 太く

ややか大 → 細く

◇何度も見ることを前提に

人間は，コンピューターとちがって忘れる動物であるということを前提に，取り組む必要があります．

➤ 忘れるのを前提に，何度も見る．

➤ 立ち寄ったとき，その足跡を残す．

文字でなくてもよい．

いたずら書きでもよい．

ライバルの彼に勝った！(7/12)など．

立ち寄った回数(何回目か)を

1回目 → T，2回目 → TT …など．

―― T は自分の or カレ(カノジョ)のイニシャル？――

◇索引も，自分用に追加する

本書の最後に「索引」があります．必要であれば，みなさんが自分で補ってください．「索引」ページの下半分は空欄になっています．書き留めておくべきだと思う事柄をそこに自由に書いてください．

*　*　*　*　*

目　次

［1］数の分類

小学生時代の算数では，正の整数だけの世界に小数・分数が加わるという新たな数の世界へ広がりを体験し，中学数学では，いきなり負の数の世界への広がりと，無理数の世界への広がりを体験することになります．そして，新世界の数を知ることは，同時に旧世界の数に名前がつく…というように進んでいきます．

▷基本性質 1

1-1　分類Ⅰ ——整数の分類・数の分類その1

整数 $\begin{cases} \text{正の整数＝自然数}_{\text{という}} \\ 0 \\ \text{負の整数} \end{cases}$

… −3　−2　−1　0　1　2　3　…

負の整数（0より小さい整数）　正の整数(自然数)（0より大きい整数）

数 $\begin{cases} \text{正の数}\quad 2,\ \dfrac{7}{3},\ 10.6,\ \cdots \\ 0 \\ \text{負の数}\quad -1,\ -2.4,\ -\dfrac{10}{3},\ \cdots \end{cases}$

「−（マイナス）」…負（ふ）の符号という．

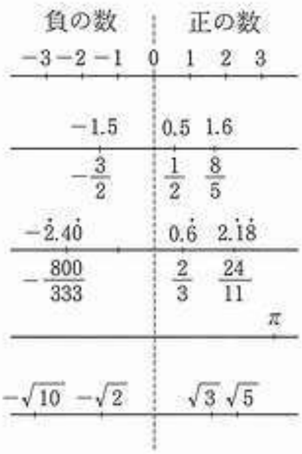
2とは＋2のこと．（＋（プラス）は不要＝つけない）

1-2　分類Ⅱ ——数の分類その2

- 実数
  - 有理数
    - 整数
    - 分数
      - 有限小数
      - 循環する無限小数
  - 無理数（循環しない無限小数）
    - π（パイ）（円周率）
    - 平方根

中学数学ここまで

高校数学で習う新たな数



☞ この「数式編」で，それぞれの数について順を追って説明していきます．はじめに「全体(全貌（ぼう）)を」ということです．

▷基本性質 2

1-3 新ルール・新記号[その1] —— 仮分数で ——

算数で扱う分数			数学で扱う分数	
	(例)			(例)
真分数	$\frac{1}{3}$	→	真分数	$\frac{1}{3}$
仮分数	$\frac{5}{3}$	→	仮分数	$\frac{5}{3}$
帯分数	$1\frac{2}{3}$	→	(使わない)※	

※☞中学・高校の数学では，帯分数は使わない．
(理由) 文字式の項参照．

$a\frac{c}{b}$ $\left.\begin{array}{l}(小学校) \to a+\frac{c}{b}\\(中学校) \to a\times\frac{c}{b}\end{array}\right\}$を意味する

$\left(=\frac{ac}{b}\right)$

1-4 新ルール・新記号[その2] —— 累乗という形 ——

2×2　2^2「2の2乗(じょう)」

$2\times2\times2$　2^3「2の3乗」

……

同じ数を何個かかけたものを
その数の「累乗」という．

$\underbrace{2\times2\times2}_{3個}=2^3$ → 3を指数という

☞ $2^1=2$

$2^0=?$ → $2^0=1$，$3^0=1$，$4^0=1$，…(ある数)$^0=1$　(☞文字式のまとめ参照)

「2乗」のことを「平方」
「3乗」のことを「立方」 }という．

2cm ［6cm²］ 3cm　$2\text{cm}\times3\text{cm}=6\text{cm}^2$ ということ．($\text{cm}\times\text{cm}$)　☞ {数値をかける / 単位もかける} ということ．

1-5 新ルール・新記号[その3] —— 不等号 ——

数の大小関係を，<，>，≦，≧で表す．

(例) $x>0$ … xは0より大きい ……………………①

$x<0$ … xは0より小さい(0未満) ……………………②

$x\geqq0$ … xは0以上 ……………………③

$x\leqq0$ … xは0以下 ……………………④

$0<x<2$ … xは0より大きく2より小さい……………………⑤

$0\leqq x\leqq2$ … xは0以上2以下……………………⑥

$0<x\leqq2$ … xは0より大きく2以下　(など)

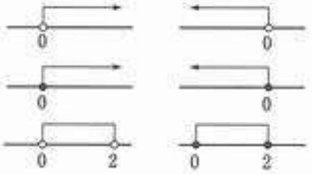
☞・「等しい」を表す記号「=」を「等号」という．
・「等しくない」を「≠」で表す．(例) $n\neq0$ (nは0ではない)

☞「数(すう)直線」上で表すとき…．　原点 0　…数直線上の0(ゼロ)の位置を「原点」という．

①・②

③・④

⑤・⑥



☞不等号の下に等号がついていない場合，数直線上では○(白丸)で，等号がついている場合は●(黒丸)で表します．

1-6 新ルール・新記号[その4]――絶対値・絶対値記号――

「絶対値」とは…

1. ＜符号をとった数＞で
2. ある数の絶対値とは，数直線上において
   ある数に対応する点と原点との距離をいう．

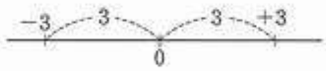
すなわち「原点からの距離」のこと．

○ -3 の絶対値　3

○ $-\dfrac{1}{2}$ の絶対値　$\dfrac{1}{2}$

○ 0 の絶対値　0

○「絶対値が 2」になる数　$+2$ と -2



$+3$ の絶対値 … 3

-3 の絶対値 … 3

☞ 0 に対応している点を「原点」という．

「絶対値記号」$|\quad|$

（例）$|-2|=2$，$|-3.6|=3.6$，$|5|=5$，$|0|=0$

☞新しい数は新しい名前とともに登場し，そのとき，すでに存在している数に新しい名前がつきます．

小学校低学年のカワユイ妹との対話．

兄　割り算勉強しているの？
妹　そうだよ，問題出して．
兄　6÷2 は？
妹　3．簡単すぎるよ．もっと難しいの，出してよ．
兄　んじゃ，2÷3 は？
妹　割れないじゃん，そんなの．
兄　いや，妹よ，割れるんだよ．
妹　ウソ！，だって，そんな答え，ないもん．
兄　それが，答えがあるんだ．必殺技を教えてあげよう．

まず，横に棒を引いて…　$2\div3=—$

次に，÷の記号の前にある数を—の上に書いて　$2\div3=\dfrac{2}{\ }$

その次に，÷の記号の後にある数を—の下に書いて　$2\div3=\dfrac{2}{3}$

これでオシマイ．—は「ぶんの」と読むんだ．

下から読んで，「3 ぶんの 2」，これが答えだ．

こう説明された妹の反応は…？．

反応①　何それ，インチキじゃん．

反応②　わあっ，すごい．簡単じゃん．

妹が知っている数の世界は実は整数(自然数)の世界で，その世界には「2÷3」の答えになるものは，ないのですが，2 メートルのひもを 3 つに分ける必要も現実的にはあるわけで，答えがないというわけにはいかない現実を前にして，人類の英知は，「分数」という新しい数を発明(実は，整数と 1 本の棒を使って表しているだけ)し，すでに存在していた数に「整数」という名をつけた…，というわけです．

$2-3=$？も，2 乗すると 2 になる数＝？も，同様．

新しい数が名前つきで旧世界に登場し，同時に旧世界の数にも新しい名前がつく．そして，歴史は繰り返す．

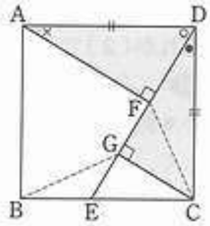
数の分類は，こうして，広がっていきます．高校数学で登場する新しい数の名は「虚数」であり，それまで使っていた「虚数」以外の数が「実数」と呼ばれることになるのです．というわけで，虚数が存在しない中学数学の世界では，「実数」の名も不要です．

直線図形（1）演習題の解答

1 （2）（1）の合同より，もう1組の合同な三角形が生まれ，そこから，平行四辺形が（さらに，2個の直角二等辺三角形まで！）現れます．

解 （1） △AFD と △DGC において，

AD＝DC ……①



また，右図で，

×＋○＝90°

●＋○＝90°

より，×＝● ………②

①，②より，

△AFD≡△DGC（斜辺と一鋭角相等）

（2） 右上図で，（1）より，CG＝DF……③

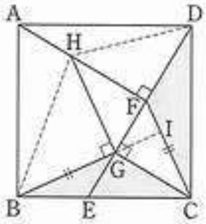
∠BCG＝90°－∠GCD

＝90°－∠FDA＝∠CDF ……④

③，④と，BC＝CD より，

△BCG≡△CDF（二辺夾角相等） …㋐

∴ BG＝CF ……⑤



∠BGC

＝∠CFD ………⑥

ところで，

∠CFG

＝180°－∠CFD …⑦

∠HGF＝360°－(90°×2＋∠BGC)

＝180°－∠BGC ………………⑧

⑥より，⑦＝⑧ ∴ CF∥GH …………㋑

これと，CG∥FH より，▱CFHG は平行四辺形であるから，GH＝CF

これと⑤より，BG＝GH ………………㋒

➡注 ㋐の対応する辺 BC と CD は直交していますから，BG と CF も直交し，（2）の図で，BI⊥CF です．このことからも，㋑が分かります．

なお，㋒により，△BGH は直角二等辺三角形ですが，FH(＝CG)＝FD より，△FDH も直角二等辺三角形です．

2 （2） 図に線分 QS を書くと，PR との交点 T は MN 上にもありそうです．これを糸口にしましょう．

解 （1） SN∥AB∥MQ より，

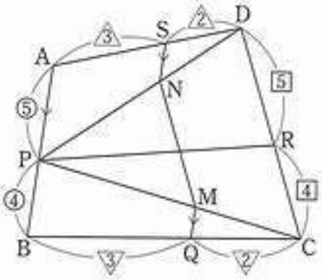
PN：ND＝AS：SD＝3：2

PM：MC＝BQ：QC＝3：2

∴ PN：ND

＝PM：MC

∴ MN∥CD



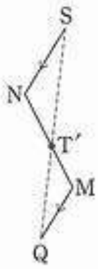
（2） QS と MN の交点を T′とすると，SN∥MQ より，

NT′：T′M

＝SN：QM

$=\mathrm{AP}\times\dfrac{2}{5}:\mathrm{PB}\times\dfrac{2}{5}$

＝AP：PB＝5：4 ……………㋐



一方，PR と MN の交点を T″とすると，（1）より，

NT″：T″M

＝DR：RC＝5：4 ……………㋑

㋐＝㋑より，T′＝T″，すなわち，QS，MN，PR は1点で交わり，この点が T である．

これと（1）より，

PT：TR＝PM：MC＝3：2

3 まず，与えられた**線分比を面積比に変換**します（∠A＝90°などの条件から，△ABC，△ADE の面積が求められることにも注意！）．

（3）では逆に，**面積比を線分比に変換**します．

解 （1） AE＝EC……㋐ より，

△AEF＝△CEF＝s とおくと，

△CAF($2s$)：△CBF＝AD：DB＝1：2

より，△CBF＝$4s$ ………………………㋑

これと㋐より，△ABF＝㋑＝$4s$