はじめに

「ちょっと差がつくうまい解法」なんて，妙ちくりんなタイトルの本をよく手に取りましたね．あなたはお目が高い．

「ちょっと差がつく」というタイトルですが，もちろん謙遜です．

ほんとうのことを言うと，ここに書かれている解法は，

「断然差がつく，ちょっとうまい解法」なんです．

うまい解法と下手な解法の差は，「ちょっと」した差です．

その差で，結果には大きな差が出てくるのです．

「うまい解法」とは，実は「本質的な解法」です．

「うまい解法」を，何か特別なテクニックのように思われては困ります．

本質は，つねに簡潔です．

モノが複雑に見えているときは，まだ本質を掴んでいないときです．

違う角度から見たとき，モノの正体がはっきりとわかるときがあります．

この本は，その角度からの見方を示している本なのです．

この本では，問題の本質を見通す解法を与えていきます．

「うまい解法」は，問題の本質を突いているから，見通しよく，速く解けるのです．

この本の内容を身につけた人は，問題が速く楽に解けるようになることでしょう．でもそれは，テクニックを身につけたからではなく，問題の本質を掴むことができるようになったからなのです．

さあ，この本を学習して，一段高いステージに上がってみましょう．

※　本書は，雑誌「大学への数学」に 08 年から 10 年まで連載した「テイクオフ講義」を一部抜粋し加筆修正したものに，練習問題を加えてまとめ直したものです．

本書の構成と利用法

この本の目次をご覧になりましたか．目次のタイトルから内容がおぼろげに分かるものもあれば，全く未知のものもあったことでしょう．トピックスが散発的に並べてあるような印象を受けたかも知れませんが，まずは初めから順に読んでください．

この本は講義（p.4〜115 の 11 章）を中心とした本ですから，講義本文のところをしっかりと読み込んでいただきたい．漆器を塗るとき初めに全体を薄塗りするように講義のところだけを全体を通してザアっと 1 周するのもよいでしょう．

講義といっても，問題を解いていく過程で手法を紹介していく講義のスタイルをとっています．1 章につき数題の問題を解説し，章末には練習問題があります．練習問題の解答は p.117 以降にまとめてあります．

講義中の問題には，既に皆さんが解けるタイプの問題もあるでしょうし，歯が立たない問題もあることでしょう．

解ける問題の場合．だからといって講義部分を飛ばしてしまうのはいただけません．この本のタイトルにあるように「ちょっと差がつくうまい解法」が講義には書かれているはずですから，自分のとった解法がその「うまい解法」なのかをチェックして欲しいと思います．問題を解くことはできているかもしれませんが，あなたの解法が「うまい解法」であるとは限りません．「うまい解法」をすでに身につけているという人は，ぜひ練習問題にチャレンジしてください．スラスラと問題が解ければ，あなたはこの手法に関して自信を持ってよいでしょう．

歯が立たない場合．時間をかけて考える必要はありません．すぐに講義を読んでかまいません．講義の内容を理解して，手法が使えるようになればよいのです．

講義の部分を読んだだけでは，同類の問題が試験で出されたときにうまく解けるとは限りません．聞いて知っているのと，体験して知っているのとでは大違い．章は，講義と練習問題からなっています．講義の内容を踏まえた上で，練習問題を実際に解いてみましょう．練習問題の難易度は，講義で扱った問題とほぼ同じです．講義の内容がどれほど理解できているかを知る 1 つの目安になるでしょう．練習問題が解けない場合は，もう一度講義の内容を読んで手法の理解に努めてください．講義問題を解説に沿って解いていくのもよい学習になります．練習問題が付いているところが，この本のウリの 1 つなのですから，ぜひとも大いに活用して頂きたいものです．

書いていることが難しく途中で学習を頓挫してしまうこともあるかもしれません．難しいなあと思われるような書き方しかできなかったことは，全くのところぼくの不徳の致すところです．そんなときでも，どうか残りの章を読むことを投げてしまわないで頂きたい．残りの章の中には，まだ十分に読みこなせるところがあるはずです．食い散らかし，大いに結構．この本は全部読まなきゃ実力がつかないという本ではありません．分かるところだけ読んでもらってかまいません．

途中から読みたい人のために，この本のマップを用意しました．例えば，「6→7」は 7 章に取り掛かるためには，→の手前にある 6 章を読んでからの方がよいということを表しています．

$$\begin{array}{ccccccc} & & & 1,\ 3 & & & \\ & & & \searrow & & & \\ 2 & \to & 5 & \to & 6 & \to & 7 \end{array}$$

4, 8, 9, 10, 11

大学への数学

ちょっと差がつく

うまい解法

目次

1 目で解く方程式

① $f(x)=0$ を $y=f(x)$ で考える

この章は，方程式の問題をグラフを用いて解くことがテーマです．もう少しくわしく言うと，方程式の問題の中でも，解が定められた範囲の中に含まれる条件を求める問題，いわゆる「解の配置」の問題を解いていきます．まずは，1次方程式の問題から解いてみましょう．

例題 1

$a \neq 0$ のとき，x の方程式

$$ax+a^2-6=0 \quad \cdots\cdots ①$$

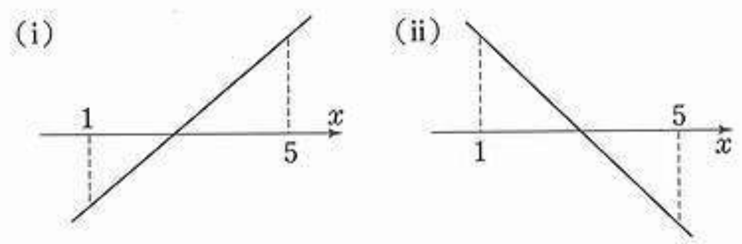
の解が $1<x<5$ の範囲にあるための実数 a の条件を求めよ．

方程式の実数解を視覚化するには，

　方程式 $f(x)=0$ に対して，グラフ $y=f(x)$

を考えるのが基本です．方程式の実数解は，グラフと x 軸の交点の x 座標に一致します．

解が $1<x<5$ の範囲にあるということは（$a \neq 0$ に注意すると），直線 $y=ax+a^2-6$ のグラフが，次のどちらかになっています．



$f(x)=ax+a^2-6$ とおきます．

(i)のようなグラフになるのは，$f(1)<0$，$f(5)>0$ $\cdots\cdots$②

(ii)のようなグラフになるのは，$f(1)>0$，$f(5)<0$ $\cdots\cdots$③

です．②または③のとき，①の解が $1<x<5$ の範囲にあります．②，③を

まとめて，

$$②または③ \Longleftrightarrow f(1)f(5)<0 \quad \cdots\cdots ④$$

と1つの不等式で書くことができます．

$$f(1)=a+a^2-6=(a+3)(a-2)$$
$$f(5)=5a+a^2-6=(a+6)(a-1)$$

を用いると，④は，

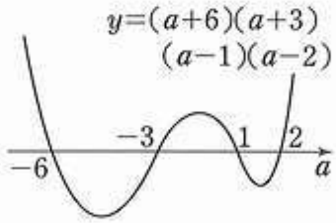
$$(a+3)(a-2)(a+6)(a-1)<0 \quad \cdots\cdots ⑤$$

となります．

これを解くには，$y=(a+6)(a+3)(a-1)(a-2)$ のグラフを考えます．

a 切片の値は -6，-3，1，2 です．

a が十分に大きいとき，$a+6$，$a+3$，$a-1$，$a-2$ がすべて正になりますから，y の値も正です．$1<a<2$ のときは，$a+6$，$a+3$，$a-1$ が正，$a-2$ が負になりますから，y の値は負です．同様にして，$-3<a<1$ のときは正です．切片の値を1つ飛び越すごとに y の正負が入れ替わるわけです．グラフは右のようになります．これから，⑤の不等式の解は，



$$\boldsymbol{-6<a<-3,\ 1<a<2}$$

なお，$(a-1)^2$ などの平方の形が式にあるときは，$a=1$ の前後でも符号は変わりません．

② 連立方程式にする

例題1では，方程式 $f(x)=0$ に対して，グラフ $y=f(x)$ を考えました．例題2では少々工夫が必要です．

例題 2

方程式 $|x^2-x-2|-x-k=0 \quad \cdots\cdots ①$

の実数解の個数を実数 k の値によって場合分けして答えよ．

①の実数解は，連立方程式

$$y=|x^2-x-2| \quad \cdots\cdots ②$$
$$y=x+k \quad \cdots\cdots ③$$

の x の実数解に等しくなります．

さらに，この連立方程式の実数解は，②，③のグラフの共有点の x 座標に等しくなります．

ですから，①の実数解の個数を知るには，k の値によって，②，③のグラフの共有点の個数が何個になるかを調べればよいのです．

初めに，$y=|x^2-x-2|$ のグラフを描いておきましょう．絶対値記号が付いていますから，これを外します．絶対値記号の中身が正となるのは，

$$x^2-x-2\geqq 0 \qquad \therefore\ (x-2)(x+1)\geqq 0$$

$$\therefore\ x\leqq -1,\ 2\leqq x$$

ですから，②は，

$x\leqq -1$ のとき，$y=|x^2-x-2|=x^2-x-2$

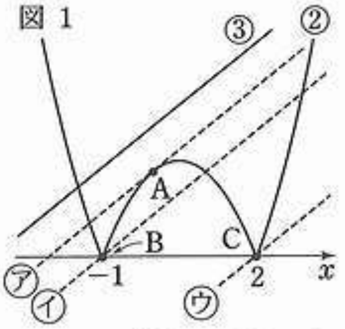
$-1\leqq x\leqq 2$ のとき，$y=|x^2-x-2|=-(x^2-x-2)$

$2\leqq x$ のとき，$y=|x^2-x-2|=x^2-x-2$

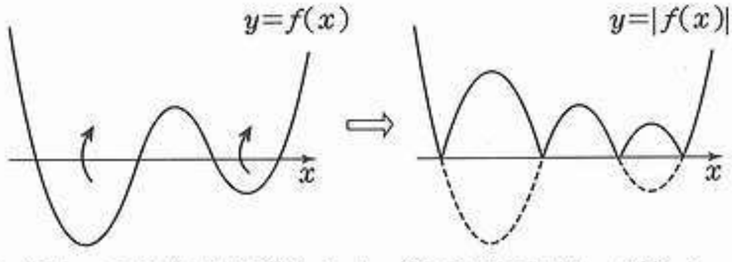
と絶対値記号が外れます．

これをもとに，②のグラフを描くと，図1のようになります．

図 1



一般に，$y=|f(x)|$ のグラフは，$y=f(x)$ のグラフの x 軸より下にある部分を x 軸に関して折り返したグラフになります．確かに図1は，$y=x^2-x-2$ のグラフの x 軸より下にある部分を折り返したグラフになっています．この事実を用いれば，場合分けしなくとも図1のグラフをスラスラと描くことができるでしょう．



②と③のグラフの共有点を考えます．③のグラフは，傾き1，y 切片 k の直線で，k の値によって位置が変わります．図1を見ると，③の直線が㋐，㋑，㋒の位置にあるときを境にして共有点の個数が変わることが観察できるでしょう．

A は，③と $y=-(x^2-x-2)$ が接するときの接点です．②と③が接するときの k の値を求めておきましょう．

$-(x^2-x-2)=x+k \qquad \therefore \ x^2+k-2=0$

(判別式)$=0$ として，

$0^2-4(k-2)=0 \qquad \therefore \ k=2$

このとき，$x^2+2-2=0$ より，$x^2=0 \qquad \therefore \ x=0$

-1 と 2 の間で重解を持ちますから，$k=2$ のとき②と③は接します．

③が㋐の位置にあるときの k は 2 です．

③が $\mathrm{B}(-1,\ 0)$ を通るときの k は，

$0=-1+k \qquad \therefore \ k=1$

③が㋑の位置にあるときの k は 1 です．

③が $\mathrm{C}(2,\ 0)$ を通るときの k は，

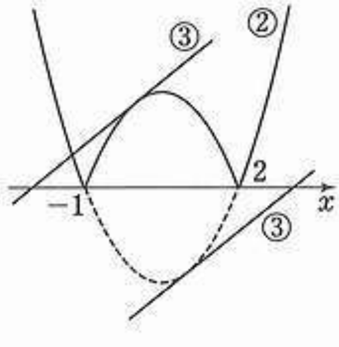
$0=2+k \qquad \therefore \ k=-2$

③が㋒の位置にあるときの k は -2 です．

したがって，答は以下のようになります．

$k<-2$ のとき，0 個，　$k=-2$ のとき，1 個
$-2<k<1$ のとき，　2 個，　$k=1$ のとき，　3 個
$1<k<2$ のとき，　4 個，　$k=2$ のとき，　3 個
$2<k$ のとき，　2 個

この解法で，③の直線と②の $x>2$ の部分が接点を持たないか心配になった人がいるかもしれません．その慎重さは，他の問題のときに生かされることでしょう．



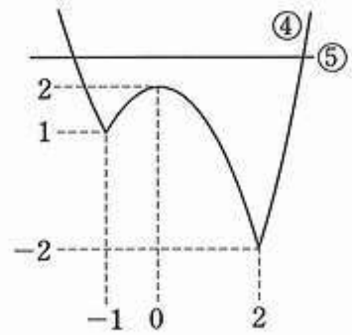
結論的にいうと，この問題では接点はありません．対称性から考えて，③と $y=x^2-x-2$ は，$-1<x<2$ で接します（右図）．

もしもこのような懸念を払拭したいのであれば，初めから，連立方程式を

$y=|x^2-x-2|-x$ ……………………④

$y=k$ ……………………………………⑤

と，k を完全に分離してしまうのがよいでしょう．



⑤のグラフは x 軸に平行な直線なので，接するところは極値を取る点です．$x>2$ では接点を持ちません．