はじめに

長年にわたって難関校受験生からの絶大な支持をいただいている，大学受験数学専門誌・月刊『大学への数学』のメインの記事で，数ＩＡⅡＢの主要分野を演習する“日日の演習”の昨年（2010 年）の 8，11 月号の数列，整数を，1 冊にまとめました．コンパクトな新書版なので，いつでもどこでも手にとって読み進められます．

問題の難易度は標準～発展レベルなので，本書の問題がマスターできれば，数列，整数に関する入試問題に対して，余裕を持って臨むことができるでしょう．

今年度の月刊誌の“日日の演習”ですでに学習した人にとっても，昨年度のぶんを補強することにより，完成度を高めることができましょう．

また，補充問題として月刊『大学への数学』2010 年，2011 年の 3～5 月号の入試特集で取り上げた大学の入試問題からも，数列，整数に関するものを精選して掲載しましたので，有名難関校の問題にも触れることができます．

本書によって，数列，整数への自信をゆるぎないものにしてください．

▶▶▶ 本書の利用法

♣対象

教科書および基本問題は卒業し，典型的な標準問題も無理なくこなせる人を対象にします．

♠本書の構成

本書は，問題編，要点の整理，解説からなります．

問題編では，数列，整数，それぞれ最後のところに，問題の難易と目標時間をまとめて掲載してあります．例えば，各自の学習の進行状況により問題を取捨選択したり，簡単には手がかりが得られない問題でも解答をすぐ見ずに目標時間の半分位は考えてみる，といったように御活用下さい．なお，難易と目標時間は，入試本番の時点を想定してのものです．

要点の整理では，本書のレベルの問題を解くのに必要な定義，定理，公式や特に重要な手法を紹介してあります．詳しい証明などは省略したものもありますので，“暗記用”ではなく，“確認用”のつもりで御利用下さい．

解説編では，まず，問題文を再掲してあります．次に，その問題に対する手がかりなどを前書きとして簡単に紹介し，解答（解）に移ります．手が出なかった問題は，解を読む前に，前書きを参考に再考するのもよいでしょう．

ポケット日日の演習
②数列・整数

目次

数列・問題編

1・1　初項 9，公差 4 の等差数列を $\{a_n\}$ とする．

（1）　$a_n=\boxed{\text{ア}}$ である．

（2）　数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和を S_n とすると，$S_n=\boxed{\text{イ}}$ であり，$S_n>1000$ となる n の最小値は $\boxed{\text{ウ}}$ である．

（3）　k を 1 以上 49 以下の整数とする．数列 $\{b_n\}$ を
$$b_n=\begin{cases} a_n-k & (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ k) \\ a_k-k & (n=k+1,\ k+2,\ k+3,\ \cdots) \end{cases}$$
で定める．$\{b_n\}$ の初項から第 50 項までの和を T とすると，$T=\boxed{\text{エ}}$ であり，$k=\boxed{\text{オ}}$ のとき T は最大値 $\boxed{\text{カ}}$ をとる．

（10　法政大・理工，生命科学，デザイン工）

1・2　等差数列 $\{a_n\}$ と等比数列 $\{b_n\}$ に対して，数列 $\{c_n\}$ を $c_n=a_n+b_n$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ で定める．
$c_1=-92$，$c_2=-84$，$c_3=-74$，$c_4=-60$ であるとき，

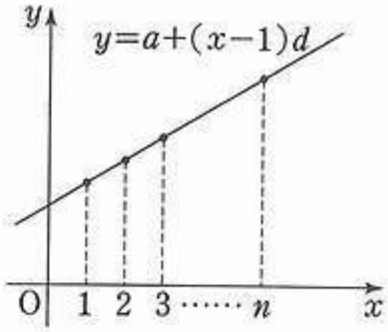
（1）　一般項 c_n を求めよ．

（2）　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}|c_k|$ を求めよ．　（10　崇城大・薬）

数列・要点の整理

1．数列の和

【1】 等差数列



初項a，公差dの等差数列の第n項a_nは

$$a_n=a+(n-1)d \quad \cdots\cdots①$$

という，nについての1次関数の形ですから，グラフを考えると明らかなように，

$$a_1\sim a_n\text{ の平均}=\frac{a_1+a_n}{2}=\frac{a_2+a_{n-1}}{2}=\frac{a_3+a_{n-2}}{2}=\cdots$$

であって，すると，$a_1\sim a_n$の和S_nについて，

$$\boldsymbol{S_n=\frac{a_1+a_n}{2}\cdot n} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots②$$

が成り立ちます．等差数列の和の公式としては②を知っていれば十分で，$S_n=\dfrac{n\{2a+(n-1)d\}}{2}$を覚える必要はありません（①と②からすぐ作れるし，わざわざ作らなくても②ですんでしまうケースがほとんど）．

なお，とくにnが奇数のときは，$S_n=(\text{中央の項})\times n$

【2】 等比数列

初項a，公比rの等比数列の第n項は，$a_n=ar^{n-1}$で，等差数列が1次関数であったのに対して，こちらは指数関数の形です．そして，$a_1\sim a_n$の和S_nは

$r \neq 1$ のとき，$S_n = \dfrac{a(1-r^n)}{1-r} = \dfrac{a(r^n-1)}{r-1}$ ……③

$r=1$ のとき，$S_n = na$

となり（$r<1$ のときは③の前者，$r>1$ のときは③の後者を使うと計算ミスをしにくいでしょう），③が

$S_n - rS_n$ を考える……………④

ことにより導かれることは御存知でしょうが，④は，$\sum$《k の整関数》$\times r^k$ の計算にも応用できます．また，③すなわち，$a(1+r+r^2+\cdots+r^{n-1}) = \dfrac{a(1-r^n)}{1-r}$ は，因数分解の公式

$$x^n - y^n = (x-y)(x^{n-1}+x^{n-2}y+x^{n-3}y^2+\cdots+y^{n-1})$$

からも明らかなことです（$x=1$，$y=r$ としてみよ）．

【３】 $\sum$《整関数》と和の一般論

$$\left.\begin{array}{c} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2},\quad \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} \end{array}\right\} \cdots ⑤$$

は必須ですが，以上②〜⑤ですべての数列の和が処理できるわけではありませんし，また，処理できる場合でもそれが最も簡単だとは限りません．みなさんは，

$\dfrac{1}{1\cdot2}+\dfrac{1}{2\cdot3}+\cdots+\dfrac{1}{n(n+1)}$ を求めるとき，

$$\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=1-\frac{1}{n+1}$$

とやることは経験ずみでしょうが，この計算でのポイン

数列・解説編

解答の☆，★については☞p.3

1・1　初項 9，公差 4 の等差数列を $\{a_n\}$ とする．

（1）　$a_n=\boxed{\text{ア}}$ である．

（2）　数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和を S_n とすると，$S_n=\boxed{\text{イ}}$ であり，$S_n>1000$ となる n の最小値は $\boxed{\text{ウ}}$ である．

（3）　k を 1 以上 49 以下の整数とする．数列 $\{b_n\}$ を

$$b_n=\begin{cases} a_n-k & (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ k) \\ a_k-k & (n=k+1,\ k+2,\ k+3,\ \cdots) \end{cases}$$

で定める．$\{b_n\}$ の初項から第 50 項までの和を T とすると，$T=\boxed{\text{エ}}$ であり，$k=\boxed{\text{オ}}$ のとき T は最大値 $\boxed{\text{カ}}$ をとる．

＊　　　　＊

［解説］（3）　b_n を定義した式において，k は定数であることに注意．$n\geqq k+1$ では b_n は一定です．

解　（1）　$\boldsymbol{a_n=4n+5}$

（2）（イ）　$S_n=\dfrac{9+(4n+5)}{2}\cdot n=\boldsymbol{n(2n+7)}$

（ウ）　$S_{20}=20\cdot47=940$，$S_{21}=21\cdot49=1029$ より $\boldsymbol{n=21}$

(3)(エ)　$T=\sum_{n=1}^{50} b_n=\sum_{n=1}^{k} b_n+\sum_{n=k+1}^{50} b_n$

$$=\sum_{n=1}^{k}(a_n-k)+\sum_{n=k+1}^{50}(a_k-k)$$
$$=S_k-k\cdot k+(a_k-k)(50-k)$$
$$=k(2k+7)-k^2+(3k+5)(50-k)$$
$$=\boldsymbol{-2k^2+152k+250}$$

(オカ)　$T=-2(k-38)^2+2\cdot 38^2+250$

$$=-2(k-38)^2+3138$$

より，$\boldsymbol{k}=38$ のとき**最大値** **3138** をとる．

≪ヒビモニの解答≫　2人が(2)(ウ)で答えに影響しない計算ミスがあった他はOK.

山本君「(1)が簡単すぎて，一瞬 $a_n=13-4n$ も答えにしようかと思った.」(20分)

龍野君「こういうやつはミスせず一発決めたい.」(8分)