はじめに

望月俊昭

多くの受験生は，数学ができるライバルが自分とちがって「頭がいい」と感じている．

非凡な才能の持ち主は，たしかに世の中にいる．スポーツ，音楽，絵画，文学，数学など，どの分野であれ後世に名を残す人々は，小・中学生の頃すでにその道を歩んでいた．数学者たちの多くは，小・中学生の頃から天才ぶりを発揮し，周囲の仲間はおろか教師をも，また時には専門家である数学者たちをも驚かせていた．数学者は誰もが解ける問題を解くのではなく，誰もが解けなかった問題を解くことで，また誰もが考えもしなかった問題を問題として世に問うことで，名を残す．

受験生が入試科目として取り組む数学を受験数学と呼ぶことにすれば，数学者がその生涯をもって取り組む数学と受験数学とは似て非なるものといってよい．

受験数学の最終目標は，答えの分かっている，解けるはずの問題を制限時間内に解いてより多く得点する，というものである．これを実現するためには，自分ができることが何であるかを知っていなければならない．言い換えれば＜こういうときはこうする＞ということがよく分かっていなければならない．

木を切る道具はいろいろあり，そのための道具の一つであるノコギリも，用途によって種類が分かれる．

太い丸太を切るチェーンソウ(電動ノコギリ)，庭の柿の木を切る刃の荒い大きなノコギリ，小枝を切る細身のノコギリ，板を曲線状に切るための糸ノコなど．また，鉈，カンナ，ナイフ，カッターなどの道具も，目的によっては必要となる．

大工職人の道具箱の中は，より専門的で高品質な道具がズラリと並ぶ．

数学ができる受験生の頭の中の道具箱には，解法のツール(＝道具)がぎっしり詰まっている．ここでいう解法のツールとは，単に公式や計算法および有名定理だけではなく，数や図形の重要性質，各種の応用問題を解くための指針なども含まれる．さらには，分野をまたがる関連問題を結びつける共通テーマや，個々の問題を解くための指針を超えた——例えば，「困難は分割せよ(デカルト)」などの——全分野に共通の大方針なども含まれる．

数学ができる受験生ほど，自分が知っていること，自分が使えること，自分にできることを，知っている．

彼らは，問題を目にした瞬間に道具の検索に入る．見慣れた問題に対しては，誰もが使う道具を無意識に取り出し，見慣れない問題に対しては，使えそうな道具にあたりをつける．どちらの場合にも，用意した道具を手にして，いや頭の中に携えて問題に立ち向かう．

このような道具箱が純粋に頭の中にのみ存在する受験生もいれば，整理されたノートによって頭の中の道具箱を常にアップグレードしている受験生もいる．

数十年前，予備校の英語教師が何度も口にしていた次の言葉が強く印象に残っている．

sufficient command of English

command とは，自由にあやつる力，を意味する．

受験数学で目標をクリヤーするために必要なのは，数学の才能とかセンスなどではなく，また個々の問題と解法の暗記ではない．それは，志望校の数学入試に対応可能な解法のツールの蓄積と，それを自由にあやつる力であり，これを自分のものにするための努力である．

本書の利用法

前置きその1

◇この本は，高校受験で志望校合格をめざしている人を対象にして，受験数学の基本・応用レベルのポイントを整理したものです．

◇本書を手にして，知らないことが多いと感じる人と，知っていることが多いと感じる人がいるはずです．また，同じ人でも，手にする時期によってその印象は大きくちがうことになります．また，手にする時期だけでなく，それまでの学習内容(範囲，難易度なども含め)のちがい，塾に通っているか否か，通っているとして，その塾が集団指導か個別指導か，など，さらに，学校や塾で受ける授業が，数学の重要事項や解法のポイントを強調してくれる授業であるか否かなど，受験生をとりまく環境は大きくちがいます．

◇１冊の受験参考書や問題集がすべての受験生に同じように役立つわけではない，というのと同様，本書の効用は様々で，本書の利用法も様々…と思います．

前置きその2

◇数や図形に関する基本事項を知らなかったり忘れていれば，思考力は役立ちません．また，解法のツールもあいまいでは入試で使い物になりません．

◇解法のツールを蓄積していくときに大事なのは，使えるように蓄積する，ということです．何冊もあるノートや膨大なプリントの中に埋もれていては意味がありません．<必要なときにサッと取り出せる>ようにためていくことが不可欠です．

◇では，必要なときにサッと取り出すためには，どうすればよいか．たくさんの小箱を，すぐ取り出せるように大きな箱に収納するときに人はどんな工夫をするか．ポイントは，何によって瞬時に見分けるのか，ということです．

① つけられた名前から，見分ける．

② 大きさ・形・色などから，見分ける．

などが基本となります．

これを，受験数学の重要事項の整理にいかに活用するか．

本書を使うにあたって

◇本書の活用のポイントについて

〔その１〕 キーワードを大事にする．

〔その２〕 イメージを大事にする．

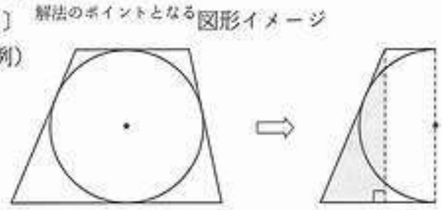
〔１〕 解法のポイントとなるキーワード

例） 隠れた特別角，骨格図で考える，…

解法のポイントとなるものをキーワードを自分の頭の中の道具箱に入れておくことです．必要性を感じたものについては，マーカーでチェック(線を引く，枠で囲む，近くに自分の文字を書き添える)してください．

〔２〕 解法のポイントとなる図形イメージ

例）



例えば，この図(左の図)は…

・この図は，どうなっている？

・この図に，どのような性質がある？

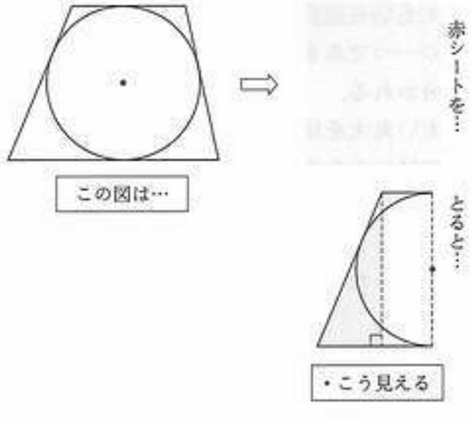
というように見て，

⇨ 右の図のようになっている

⇨ 右の図のような性質がある

チラッと左の図を見て，パッと右の図にある性質を見抜く(必要がある)，ということを意味します．

というわけで，



◇本書で使っている記号(矢印)について

矢印 ⇨

左の図 ⇨ 右の図

・この図形は ………… こうなっている

・この図形には ……… このような性質がある

・この図形には ……… このような形が隠れている

矢印 ⇨

左の図 ⇨ 言葉 文字の式

・この図形には ……… 言葉や式で示すとこのような性質がある

矢印 ➡

矢印 ➡

色のついたこの2組の矢印は，やや応用的な内容に関するもので，その意味は白い矢印と同じです．

☞白い矢印と色のついた矢印のちがいは，厳密なものではありません．どちらも難しいという人もいるでしょうし，どちらも常識という人もいるでしょう．

◇例題の★マークについて

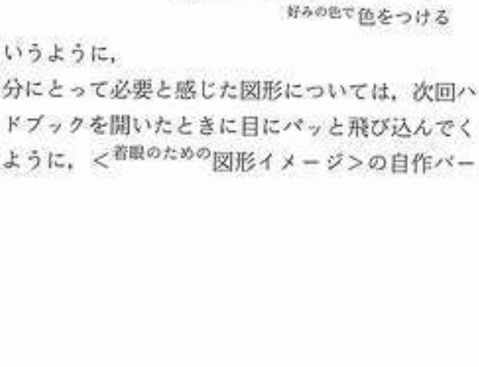
重要事項の説明を補足する例題がありますが，その中で多少難しめの例題には★マークをつけてあります．難関校受験生は確認してください．

◇自分専用にチューンアップする

☞チューンアップ … 手を加えて性能をよくする

本書の文字や図版は黒の単色で，カラー刷りではありません．みなさんが自分で必要に応じて色をつけてください．

例えば，



というように，

自分にとって必要と感じた図形については，次回ハンドブックを開いたときに目にパッと飛び込んでくるように，<着眼のための図形イメージ>の自作バージョン(自作版)をつくっておく，という発想で．

前置きにも書いたように，本書を手にする時点で，何が分かっていて何が分かっていないか，どの図形が頭に入っていてどの図形が頭に入っていないか，というのは，人によって様々です．自分専用のハンドブックへ，改良してください．

◇書き込むときの文字の工夫

本書では，上付き文字・下付き文字を多用しています．みなさんも，ぜひ使ってください．

（例） 相似がテーマの基本図形
↑
上付き文字

◇付箋をつける工夫

自分とっての重要度によって，付箋の貼り方を変える．

決定的に重要 … はみ出しを長め

それなりに重要 … はみ出しを短め（など）

◇マーカーを使う工夫

自分にとっての重要度　最大 → 太く

ややに大 → 細く

◇何度も見ることを前提に

人間は，多分他の動物とちがって，生きていくのに必要なこと以外のことも覚えることができます．しかし，それは，全てを覚えることがないよう，忘れていくことをともなった人間的活動です．人間は忘れる動物であるということを前提に取り組む必要があります．

➢ 忘れるのを前提に，何度も見る．

➢ 立ち寄ったとき，その足跡を残す．

文字でなくてもよい．

いたずら書きでもよい．

ライバルの彼に勝った！(7/12)など．

立ち寄った回数(何回目か)を

1回目→T，2回目→TT　…など．

―Tは自分の or カレ(カノジョ)のイニシャル？―

◇索引も，自分用に追加する

本書の最後に「索引」があります．必要であれば，みなさんが自分で補ってください．「索引」の p.117 の右欄は空欄になっています．書き留めておくべきだと思う事柄をここに自由に書いてください．

＊　　＊　　＊　　＊　　＊

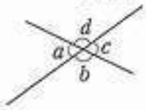
目　次

[1] 角度

大事な角度が赤く見える3Dメガネなんて便利なものはありません．三角形の合同や相似を見抜くためには，○と×で90°という発想に代表されるように，「角度に関する重要事項」を，単に「知っている」というレベルから「使える」レベルに高めておく必要があります．

▷基本性質 1

1-01　対頂角は等しい



⇨ $a=c,\ b=d$

（理由）

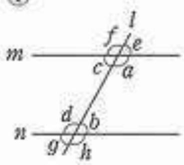
$a+d=180°$ ……①

$c+d=180°$ ……②

①，②より，$a+d=c+d$　∴　$a=c$

1-02-1　平行な2直線と交わると…

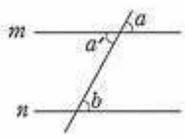
①



（$m \parallel n$）

⇨ $a+b=180°$
$c+d=180°$
$e+h=180°$
$f+g=180°$

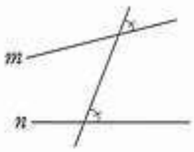
②



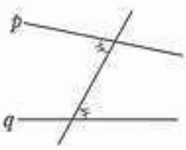
（$m \parallel n$）

⇨ 同位角が $a=b$，等しい　錯角が $a'=b$ 等しい

1-02-2



⇨ $m \parallel n$

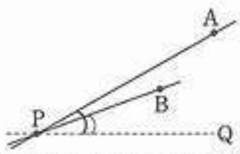


⇨ $p \parallel q$

▶応用テーマ 1

1-01　3点が一直線上にあるとわかる

$\angle APQ=\angle BPQ$ のとき



➡ 3点 P，A，B は同一直線上にある

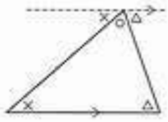
⬅これを利用すれば…，3点が一直線上にあることの証明が可能になります．

Memo 「平行」を表す記号
日本 … ⫽
欧米 … ∥

▷基本性質 2

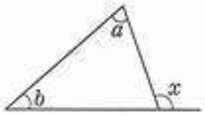
1-03-1　三角形の内角の和＝180°

(理由)



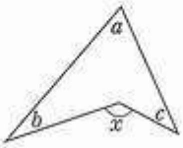
⇒ ○×△＝180°

1-03-2　2つの内角の和＝外角



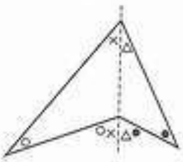
⇒ $x=a+b$

1-03-3　3つの内角の和＝外角

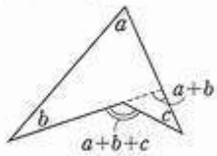


⇒ $x=a+b+c$

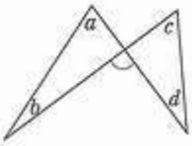
(理由その1)



(理由その2)



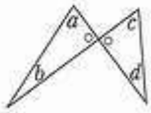
1-03-4　2つの内角＝2つの内角



⇒ $a+b=c+d$

(理由その1)　$a+b=c+d=\measuredangle$

(理由その2)



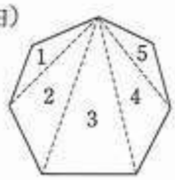
$a+b+\circ$
‖
$c+d+\circ$
‖
180°

1-04　n 角形の内角の和

180°×$(n-2)$

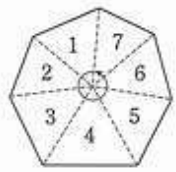
(例)　$n=7 \rightarrow 180°\times(7-2)=900°$

(理由)



180°×(7−2)

or

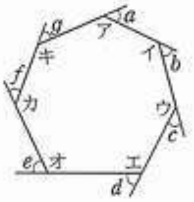


180°×7−360°

1-05　n 角形の外角の和

みな 360°

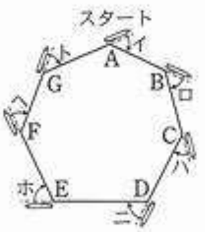
(理由：7角形で確認その1)



$a=180°-$ア
$b=180°-$イ
$c=180°-$ウ
⋮
$+\quad g=180°-$キ
$a\sim g=180°\times7-($ア〜キ$)$
‖
$180°\times7$
$-360°$
$=360°$

(理由：7角形で確認その2)

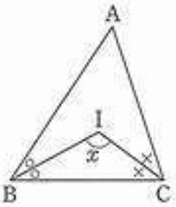
〈スタンバイ〉
○実際にシャープペンを手にもって
○頭の中にシャープペンをイメージして or



Step 1 (スタート)　イだけ回転
AB 上をツツーとすべって
Step 2　ロだけ回転
BC 上をツツーとすべって
⋮
Step 7　トだけ回転
GA 上をツツーとすべって
(ゴール：元の位置にもどる)
‖
360°回転した〃

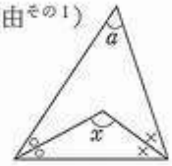
▷基本性質 3

1-06-1 角の二等分線がつくる角 ①



⇨ $x=90°+\frac{1}{2}\angle A$

（理由その1）



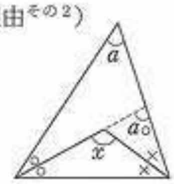
$x=180°-\bigcirc\times$

$\bigcirc\bigcirc\times\times=180°-a$

$\bigcirc\times\ \ =90°-\frac{1}{2}a$

$x=90°+\frac{1}{2}a$

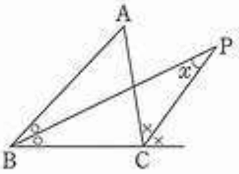
（理由その2）



$$
\begin{array}{rl}
 & x=180°-\bigcirc\times \\
+) & x=a\ \ +\bigcirc\times \\
\hline
 & 2x=180°+a
\end{array}
$$

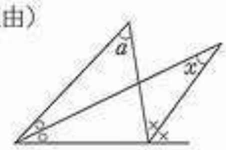
$\therefore\ x=90°+\frac{1}{2}a$

1-06-2 角の二等分線がつくる角 ②



⇨ $x=\frac{1}{2}\angle A$

（理由）



$x=\times-\bigcirc$

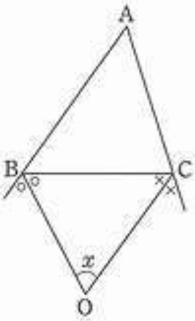
$a=\times\times-\bigcirc\bigcirc$

$\frac{1}{2}a=\times-\bigcirc$

$\therefore\ x=\frac{1}{2}a$

▶応用テーマ 2

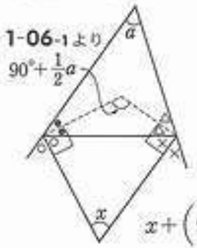
1-02 角の二等分線がつくる角 ③



➡ $x=90°-\frac{1}{2}\angle A$

⬅基本性質を利用すると…

（理由その2）

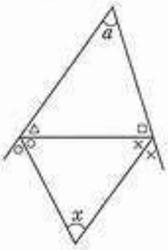


$x+\left(90°+\frac{1}{2}a\right)$

$=180°$

$\therefore\ x=90°-\frac{1}{2}a$

（理由その1）



$x=180°-\bigcirc\times$

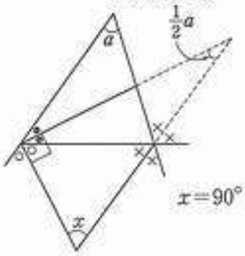
$180°-a=360°-\bigcirc\bigcirc\times\times$

$90°-\frac{1}{2}a=180°-\bigcirc\times$

☞

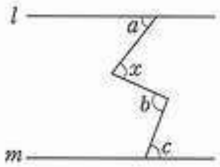
$$
\begin{array}{rl}
 & \triangle=180°-\bigcirc\bigcirc \\
+ & \square=180°-\times\times \\
\hline
 & \triangle\square=360°-\bigcirc\bigcirc\times\times
\end{array}
$$

（理由その3）



$x=90°-\frac{1}{2}a$

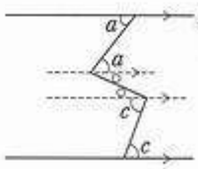
【例 1】



$l /\!/ m$ のとき

$x=\boxed{}$

解説その1

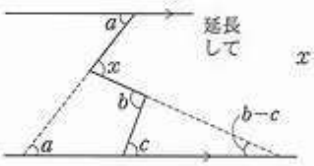


$\circ = b-c$ より

$x=a+\circ$

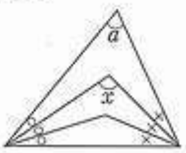
$\quad =\boldsymbol{a+b-c}$

解説その2



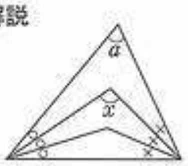
$x=\boldsymbol{a+b-c}$

【例 2】



$x=\boxed{}$

解説



$x=180^\circ-\circ\circ\times\times$

$\circ\circ\circ\times\times\times=180^\circ-a$

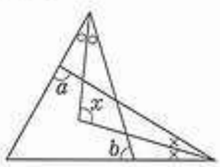
$\frac{2}{3}$

$\circ\circ\times\times=120^\circ-\frac{2}{3}a$

$\therefore\ x=180^\circ-\left(120^\circ-\frac{2}{3}a\right)$

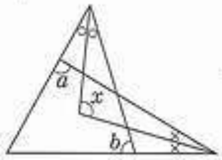
$\quad =\boldsymbol{60^\circ+\frac{2}{3}a}$

【例 3】



$x=\boxed{}$

解説

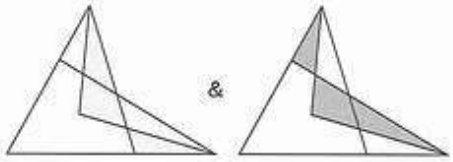


1-03-4 より

$$\begin{array}{rl} x+\circ & =180^\circ-b+\times \\ +\ \ x+\times & =180^\circ-a+\circ \\ \hline 2x & =360^\circ-(a+b) \end{array}$$

$\therefore\ x=\boldsymbol{180^\circ-\frac{a+b}{2}}$

着眼イメージ



☞  と  ときたら…

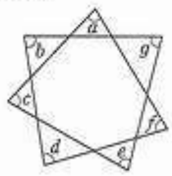
○=？ ×=？？ でなく

○と×のペアで

和 ○＋×＝？

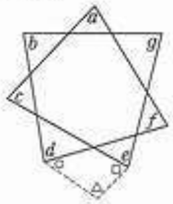
差 ○－×＝？（または） で扱うのが基本.

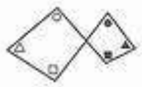
【例 4】



$a \sim g$ の和$=\boxed{}$

解説その1





○△□

||

●▲■

より

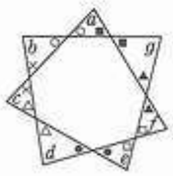
$\circ\triangle\square=a+c+f$

$a\sim g=b+d+\circ\triangle\square+e+g$

（5 角形）

$=180^\circ\times(5-2)=\boldsymbol{540^\circ}$

解説その2



$$\begin{array}{rl} & a+\circ\,\blacksquare \\ & b+\times\,\circ \\ & c+\triangle\,\times \\ & d+\bullet\,\triangle \\ & e+\square\,\bullet \\ & f+\blacktriangle\,\square \\ + & g+\blacksquare\,\blacktriangle \\ \hline & a\sim g+360^\circ\times 2=180^\circ\times 7 \end{array}$$

$\therefore\ a\sim g=180^\circ\times 3=\boldsymbol{540^\circ}$

☞鉛筆 or シャープペン方式も含めて何通りもの解法がある.