はじめに

長年にわたって難関校受験生からの絶大な支持をいただいている，大学受験数学専門誌・月刊『大学への数学』のメインの記事で，数ＩＡⅡＢの主要分野を演習する“日日の演習”の昨年（2010年）の6，7月号のベクトル，座標を，1冊にまとめました．コンパクトな新書版なので，いつでもどこでも手にとって読み進められます．

問題の難易度は標準～発展レベルなので，本書の問題がマスターできれば，ベクトル，座標に関する入試問題に対して，余裕を持って臨むことができるでしょう．

今年度の月刊誌の“日日の演習”ですでに学習した人にとっても，昨年度のぶんを補強することにより，完成度を高めることができましょう．

また，補充問題として月刊『大学への数学』2010年，2011年の3～5月号の入試特集で取り上げた大学の入試問題からも，ベクトル，座標に関するものを精選して掲載しましたので，有名難関校の問題にも触れることができます．

本書によって，ベクトル，座標への自信をゆるぎないものにしてください．

▶▶▶ 本書の利用法

♣対象

教科書および基本問題は卒業し，典型的な標準問題も無理なくこなせる人を対象にします.

♠本書の構成

本書は，問題編，要点の整理，解説からなります.

問題編では，ベクトル，座標，それぞれ最後のところに，問題の難易と目標時間をまとめて掲載してあります.例えば，各自の学習の進行状況により問題を取捨選択したり，簡単には手がかりが得られない問題でも解答をすぐ見ずに目標時間の半分位は考えてみる，といったように御活用下さい．なお，難易と目標時間は，入試本番の時点を想定してのものです.

要点の整理では，本書のレベルの問題を解くのに必要な定義，定理，公式や特に重要な手法を紹介してあります．詳しい証明などは省略したものもありますので，“暗記用”ではなく，“確認用”のつもりで御利用下さい.

解説編では，まず，問題文を再掲してあります．次に，その問題に対する手がかりなどを前書きとして簡単に紹介し，解答（解）に移ります．手が出なかった問題は，解を読む前に，前書きを参考に再考するのもよいでしょう.

ポケット日日の演習
①ベクトル・座標

目次

ベクトル・問題編

1・1　三角形 OAB について，$OA=\sqrt{2}$，$OB=\sqrt{3}$，$AB=2$ とする．点 O から辺 AB に下した垂線の足を L，辺 OB に関して L と対称な点を P とする．

$\vec{a}=\overrightarrow{OA}$，$\vec{b}=\overrightarrow{OB}$ とおく．

（1）　$\vec{a}\cdot\vec{b}$ を求めよ．また $\overrightarrow{OL}$ を $\vec{a}$ と $\vec{b}$ で表せ．

（2）　$\overrightarrow{OP}$ を $\vec{a}$ と $\vec{b}$ で表せ．　（10　兵庫県立大・理）

1・2　原点 O を中心とする半径 1 の円周上にある 3 点 A，B，C が条件 $7\overrightarrow{OA}+5\overrightarrow{OB}+3\overrightarrow{OC}=\vec{0}$ を満たすとき，次の問いに答えよ．

（1）　$\angle BOC$ を求めよ．

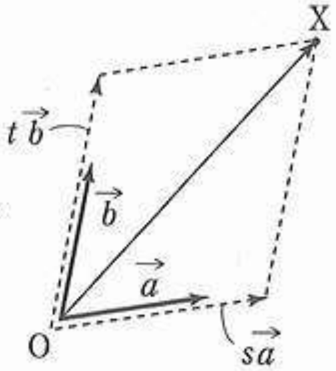
（2）　直線 CO と直線 AB の交点を H とするとき，$\overrightarrow{OH}$ を $\overrightarrow{OC}$ を用いて表せ．

（3）　$\triangle OHB$ の面積を求めよ．

（10　島根大・総合理工－後，一部略）

ベクトル・要点の整理

1．ベクトルの和と実数倍



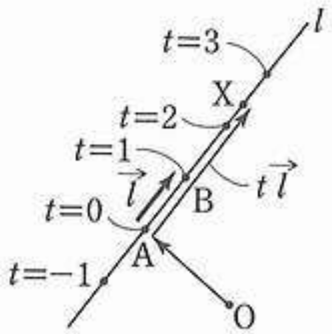
平面上の任意の点Xは，1次独立である（平行でもなく$\vec{0}$でもない）2つのベクトル$\vec{a}$，$\vec{b}$を用いて，

$\overrightarrow{\mathrm{OX}}=s\vec{a}+t\vec{b}$ ……………①

の形で表すことができます．

つまり，1次独立である2つのベクトルをもってくれば，平面上のどんなベクトルも，これらをのばしたり(実数倍)，つないだり(和)することによって表せるということです．これが，平面のベクトルを扱う上での基本になります．

（例1）　直線のパラメーター表示など



点Aを通り，ベクトル$\vec{l}$に平行な直線l上の点Xは，

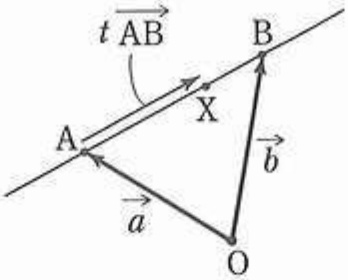
$\overrightarrow{\mathrm{OX}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\vec{l}$ ………②

と表され，逆に，tがすべての実数値をとるとき，点Xの集合は直線l全体になります．

したがって，②が，直線lのパラメーター表示になるわけですが，②のパラメーターtには，

l上に，上図のAを原点としBを1とする数直線（単位の長さは$|\vec{l}|$）を設定したときの目盛りを表す

という意味があることを十分認識しておきましょう．例えば右図の直線 AB 上の点 X は



$$\overrightarrow{\mathrm{OX}}=\vec{a}+t\overrightarrow{\mathrm{AB}}$$
$$=\vec{a}+t(\vec{b}-\vec{a})\cdots③$$
$$=(1-t)\vec{a}+t\vec{b}\cdots④$$ （係数の和は 1）

と表されますが，単に X が直線 AB 上にあるというだけでなく，他の条件がついているときは，③の t にその条件を反映させればよく，たとえば，

X は線分 AB 上の点 $\Longleftrightarrow$ $0 \leqq t \leqq 1$

X は BA の A のほうの延長上の点 $\Longleftrightarrow$ $t<0$

X は AB を 2：1 に内分する点 $\Longleftrightarrow$ $t=\dfrac{2}{3}$

X は AB を 3：1 に外分する点 $\Longleftrightarrow$ $t=\dfrac{3}{2}$

また，一般に，$0 \leqq t \leqq 1$ のとき，③で与えられる点 X は線分 AB を $t:(1-t)$ に内分する点ですが，④つまり，　$\overrightarrow{\mathrm{OX}}=(1-t)\vec{a}+t\vec{b}$

は，内分点の公式そのものです（“$m:n$” であれば，$t=\dfrac{m}{m+n}$ として，$\overrightarrow{\mathrm{OX}}=\dfrac{n\vec{a}+m\vec{b}}{m+n}$，とくに，AB の中点は，$\dfrac{\vec{a}+\vec{b}}{2}$ となります）．

なお，④で，$1-t=s$ とおくと，X が直線 AB 上にあるための条件は，$\overrightarrow{\mathrm{OX}}=s\vec{a}+t\vec{b}$ $(s+t=1)$

で捉えられますが，根本はあくまでも③です．

ベクトル・解説編

解答の☆，★については☞p.3

1・1　三角形OABについて，$OA=\sqrt{2}$，$OB=\sqrt{3}$，$AB=2$とする．点Oから辺ABに下した垂線の足をL，辺OBに関してLと対称な点をPとする．
$\vec{a}=\overrightarrow{OA}$，$\vec{b}=\overrightarrow{OB}$とおく．

（1）　$\vec{a}\cdot\vec{b}$を求めよ．また$\overrightarrow{OL}$を$\vec{a}$と$\vec{b}$で表せ．

（2）　$\overrightarrow{OP}$を$\vec{a}$と$\vec{b}$で表せ．

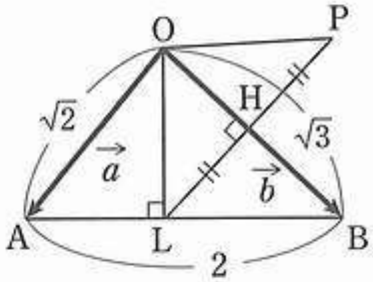
*　　　　　*

［解説］　垂線の足は正射影ベクトル（☞p.26）で捉えられます．また，対称点は垂線を2倍に延ばした点です．

解　（1）　$|\overrightarrow{BA}|^2=4$より，$|\vec{a}-\vec{b}|^2=4$

$\therefore\quad 2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+3=4$

$\therefore\quad \boldsymbol{\vec{a}\cdot\vec{b}=\dfrac{1}{2}}$



$\overrightarrow{AL}$は，$\overrightarrow{AO}$の$\overrightarrow{AB}$上への正射影ベクトルだから，

$$\overrightarrow{AL}=\frac{\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|^2}\overrightarrow{AB}$$

$$=\frac{-\vec{a}\cdot(\vec{b}-\vec{a})}{4}\overrightarrow{AB}=\frac{-(1/2)+2}{4}\overrightarrow{AB}=\frac{3}{8}\overrightarrow{AB}$$

$$\therefore\quad \overrightarrow{OL}=\overrightarrow{OA}+\frac{3}{8}\overrightarrow{AB}=\vec{a}+\frac{3}{8}(\vec{b}-\vec{a})=\boldsymbol{\frac{5}{8}\vec{a}+\frac{3}{8}\vec{b}}$$

（2）　LからOBに垂線LHを下ろすと，$\overrightarrow{OH}$は，$\overrightarrow{OL}$の$\vec{b}$上への正射影ベクトルだから，

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{OL}}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|^2}\vec{b}$$

$$=\frac{\left(\frac{5}{8}\vec{a}+\frac{3}{8}\vec{b}\right)\cdot\vec{b}}{3}\vec{b}=\frac{\frac{5}{8}\cdot\frac{1}{2}+\frac{3}{8}\cdot 3}{3}\vec{b}=\frac{23}{48}\vec{b}$$

$$\therefore\quad \overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OL}}+2\overrightarrow{\mathrm{LH}}=\overrightarrow{\mathrm{OL}}+2(\overrightarrow{\mathrm{OH}}-\overrightarrow{\mathrm{OL}})=2\overrightarrow{\mathrm{OH}}-\overrightarrow{\mathrm{OL}}$$

$$=2\cdot\frac{23}{48}\vec{b}-\left(\frac{5}{8}\vec{a}+\frac{3}{8}\vec{b}\right)=-\frac{5}{8}\vec{\boldsymbol{a}}+\frac{7}{12}\vec{\boldsymbol{b}}$$

⇨注　(1)　正射影ベクトルの記憶があやふやなら，$\overrightarrow{\mathrm{AL}}=t\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ とおいて，$\overrightarrow{\mathrm{OL}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{AB}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=0$ から t を求めても，もちろん結構．(2)の $\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ も同様．

≪ヒビモニの解答≫　(1)　$\vec{a}\cdot\vec{b}$ は3人が解と同様，5人は余弦定理で $\cos\angle\mathrm{AOB}$ を求めました．$\overrightarrow{\mathrm{OL}}$ は**菊田君**が解方式，6人は $\overrightarrow{\mathrm{OL}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=0$ から．
(2)　5人が解のHに着目（**延廣君**と**山本君**が解方式，2人は $\overrightarrow{\mathrm{LH}}\cdot\vec{b}=0$ から）．3人ケアレスミス，正解5人．
神林君「心地よく解けました．」(25分)