高校入試

1対1の図形演習

本書の利用法

◆ 本書の特色 ◆

本書は，高校受験を目指す人のために，中学数学の図形部門の全範囲をカバーした演習書です．

中学数学を，大きく数式部門と図形部門に二分し，その後者を扱っているということです．

そして，右記のように，図形全体を大きく，「直線図形」，「円」，「立体」に分け，それぞれについて２つの章立てで構成してあります．さらに，最終章には，総まとめとしての「動く図形」を配置しました．

本書の最大の特色は，１つのテーマについて，

‘例題’と‘演習題’の２題が，１対１のセットになって組み込まれている

ということです．すなわち，まず基本～標準レベルの‘例題’とその詳しい解説が提示され，それを熟読・理解した上で，やや発展的な‘演習題’を自力で解いてみる――という流れになっています．それにより，そのテーマについての理解がより深まり，自分の中にしっかり定着させることができるはずです．

本書は，月刊誌『高校への数学』で使用されている難易度

A…基本，B…標準，C…発展，D…難問

の**ＢとＣランクの問題で構成**されています．すなわち，**教科書レベルの基本は一通りマスターしている人が，中堅～難関の高校受験レベルにまで実力をアップさせるのに最適な演習書**といえます．このような受験生はもとより，中高一貫校で中学範囲の数学の完成を目指す人などにもおすすめの一書です．

◆ 本書の構成 ◆

本書は，中学の図形部門を，以下の７つの章に構成しました．

第１章　直線図形(１)―合同・相似＆比
第２章　直線図形(２)―三平方の定理
第３章　円(１)―接線を含まない図形
第４章　円(２)―接線を含む図形
第５章　立体(１)―角柱・角錐
第６章　立体(２)―円柱・円錐・球
第７章　動く図形―軌跡・最大最小・作図

そして各章は，「要点のまとめ」，「例題の問題と解答＆演習題の問題…㋐」，「演習題の解答」の３つのパーツからなっています．

メインのパーツである㋐では，‘例題’と‘演習題’のペアを(原則として)１ページに収めてあります．‘例題’については，問題の下に解説を載せ，すぐにその問題の攻略法が学べるようになっています．解答への指針としての**前書き**と詳しい**解答**に加えて，**別解**，**注**，**研究**，さらには**類題**まで，盛り沢山の内容です．そして，それらの右側には，行間を埋める**補足事項**が懇切丁寧に記されています．

‘例題’の解説が一通り理解できた後は，その下の‘演習題’にチャレンジしてみましょう．その解説は，章末にまとめられています．ここもしっかりと読みこなして，ゆるぎない実力を身に付けましょう．

◆ 本書で使われている記号 ◆

★………問題番号の右肩に付いている場合は，**難易度がCランクの発展問題**であることを表します．また，「要点のまとめ」などの解説部分に付いている場合は，その内容が**やや高度な発展事項**であることを表します．

解……その問題の本解を表します．

別解……本解に対する別解を表します．

➡注……解答の補足や問題の背景等々の注意事項です．

■研究…その問題についての一般論や，高校(以上)で学ぶ内容などの発展事項が述べられています．

【類題】…その問題の類題を紹介してあります．これにもぜひチャレンジしてみましょう．

⇦，⬅…'例題'の解説部についての補足事項です．特に「⬅」は，**ぜひ確認してほしい重要事項**を表します．

＊　　＊

その他，重要部分は**太字**になっていたり，網目がかけられていたり，傍線(――や――など)が引かれていたりと，読者の皆さんに注目してもらえるような工夫が満載です！

◆ 他の増刊号との連携 ◆

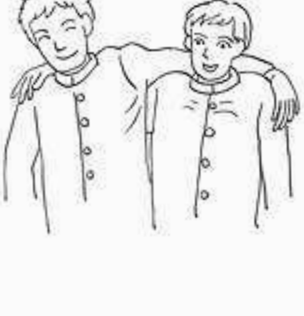
書名の示す通り，本書は，中学数学の図形部門についての演習書です．同じ図形部門についての解説書である**『図形のエッセンス』**を併せて読めば，図形についての理解がより深まるでしょう．

また，数式部門についても同様に強化したいときには，本書の姉妹編である**『1対1の数式演習』**さらには解説書の**『数式のエッセンス』**をぜひお読み下さい．

数式＆図形をすべて含んだ演習書としては，以下の3冊シリーズがあります．

㋐ **『レベルアップ演習』** ………Aが中心
㋑ **『High スタンダード演習』**…A～B
㋒ **『日日のハイレベル演習』** …C～D

本書の難易度は，前述のように「B～C」なので，**㋑と㋒の中間の難易度**といえます．本書を一通り学習し終えて，難易度Dランクの超難問を体験したい人は，『日日のハイレベル演習』に進んでみて下さい．



第1章　直線図形（1）

平面での直線図形(三角形，四角形など)のうち，“三平方の定理”を使うものは第2章で扱い，ここでは，それ以外の，‘合同・相似’などを使う問題を取り上げる．そこでは，‘線分比や面積比’を求める問題が中心になる．また，証明問題も何題か含まれているので，証明問題の答案の書き方にも慣れておきたい．

第１章　直線図形(1)
要点のまとめ

1. 合同

1・1　三角形の合同条件

次のいずれかが成り立つとき，２つの三角形は合同である．

- 三辺の長さが等しい（三辺相等）
- 二辺の長さとその間の角の大きさが等しい（二辺夾角相等）
- 二角の大きさとその間の辺の長さが等しい（二角夾辺相等）

1・2　直角三角形の合同条件

特に，直角三角形においては，

- 斜辺と他の一辺の長さが等しい（斜辺と他の一辺相等）
- 斜辺の長さと１つの鋭角の大きさが等しい（斜辺一鋭角相等）

場合も合同になる．

2. 相似

2・1　三角形の相似条件

次のいずれかが成り立つとき，２つの三角形は相似である．

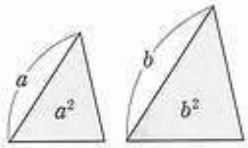
- 二角の大きさが等しい（二角相等）
- 二辺の長さの比とその間の角の大きさが等しい（二辺比夾角相等）
- 三辺の長さの比が等しい（三辺比相等）

2・2　相似比と面積比

相似比が $a:b$ である２つの平面図形について，面積比は，

$$a^2 : b^2$$

になる（立体図形においては，体積比は，$a^3 : b^3$ になる）．

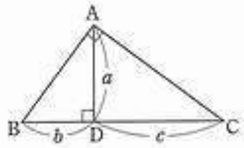


2・3　直角三角形に現れる相似形

一般に，右図で，

$\triangle ABC \backsim \triangle DBA$
$\backsim \triangle DAC$

が成り立つ（このことから，例えば，$a^2=bc$ などが言える）．



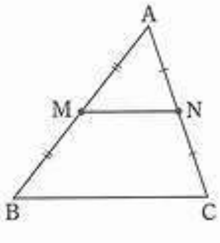
2・4　中点連結定理

右図で，M，N が各辺の中点のとき，

$$MN /\!/ BC$$

$$MN=\frac{1}{2}BC$$

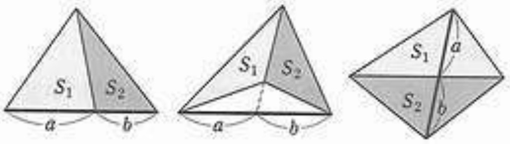
が成り立つ．



3. 線分比・面積比

3・1　三角形の面積比（1）

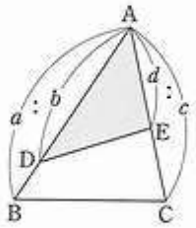
以下の各図で，$S_1 : S_2 = \boldsymbol{a} : \boldsymbol{b}$ が成り立つ．



3・2　三角形の面積比（2）

右図のように，1つの角が等しい（または補角を成す）三角形の面積比は，

$$\frac{\triangle \mathrm{ADE}}{\triangle \mathrm{ABC}} = \frac{b}{a} \times \frac{d}{c} = \frac{\boldsymbol{bd}}{\boldsymbol{ac}}$$



3・3　角の2等分線の定理

右図で，AD が∠A の2等分線のとき，

$\boldsymbol{x} : \boldsymbol{y} = \boldsymbol{a} : \boldsymbol{b}$

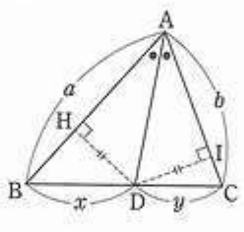
が成り立つ．［証明は，

$x : y$

$= \triangle \mathrm{ABD} : \triangle \mathrm{ACD}$

$= a : b$

（$\triangle \mathrm{ADH} \equiv \triangle \mathrm{ADI}$ に注意）］

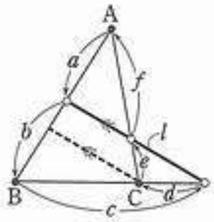


3・4　メネラウスの定理

図のように，△ABC と，その各辺（またはその延長）に交わる直線 l がある図形において，

$$\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}} \times \frac{\boldsymbol{c}}{\boldsymbol{d}} \times \frac{\boldsymbol{e}}{\boldsymbol{f}} = 1 \quad \cdots Ⓐ$$

が成り立つ．［証明は，l に平行な補助線を引いて，辺 AB 上にすべての比を集める．］



➡注　Ⓐは，「△ABC の頂点を●，l と各辺との交点を○として，**●と○を交互にたどる**（スタートはどこでもよい）」と覚えておきましょう．

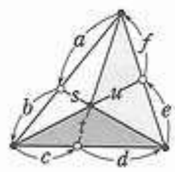
3・5　チェバの定理

右図において，

$$\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}} \times \frac{\boldsymbol{c}}{\boldsymbol{d}} \times \frac{\boldsymbol{e}}{\boldsymbol{f}} = 1 \quad \cdots\cdots Ⓑ$$

が成り立つ．［証明は，三角形を3つに分け，面積を s，t，u とすると，

$$(Ⓑの左辺) = \frac{u}{t} \times \frac{s}{u} \times \frac{t}{s} = 1 \quad となる．］$$



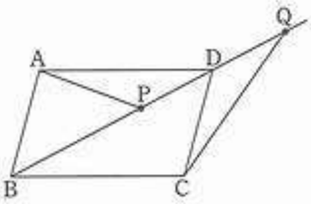
➡注　Ⓑは，**3・4 のⒶと全く同じ式**です．

1　合同による証明

右の図で，四角形ABCDは平行四辺形である．点Pは線分BD上の点で，また，線分BDをDの方向に延ばした直線上に点Qをとる．

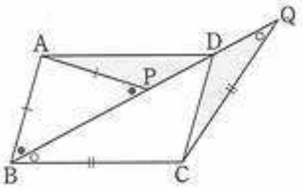
∠ABP＝∠APB，∠CBQ＝∠CQBのとき，点Dは線分PQの中点であることを証明しなさい．

（07　都立西）



「中点」を証明するのに，何を目標にするか，がポイントです．等角や等辺に印を付けていくと，‘合同’が見えてくるはず(？)です．

解　与えられた条件より，右図の●同士，○同士の角はそれぞれ等しく，このとき，



AP＝AB…①，CQ＝CB…②

⇦△APB，△CQBは，ともに二等辺三角形．

△APDと△CDQにおいて，

①とAB＝CDより，AP＝CD

②とCB＝ADより，CQ＝AD

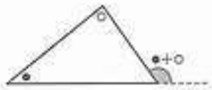
⇦ここまでで‘二辺相等’が言えたので，最後の目標は‘夾角相等’すなわち，∠PAD＝∠DCQ

次に，AD∥BCより，∠ADB＝∠CBD＝○

　　AB∥DCより，∠CDB＝∠ABD＝●

よって，∠PAD＝∠APB－∠ADP＝●－○

⇦**三角形の内角と外角の関係**（下図のようになる．）



∠DCQ＝∠CDB－∠CQD＝●－○

∴　∠PAD＝∠DCQ

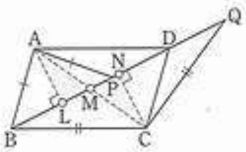
以上の　　により，△APD≡△CDQ（二辺夾角相等）

よって，PD＝DQであるから，Dは線分PQの中点である．

別解　右図のようにL，M，Nを定め，BL＝a，BN＝bとすると，MはLNの中点であるから，BM＝$\dfrac{a+b}{2}$　……③

このとき，BP＝$2a$，BQ＝$2b$，

BD＝③×2＝$a+b$，よって，BD＝$\dfrac{BP+BQ}{2}$が成り立つから，DはPQの中点である．



⇦LはBPの，MはBDの，NはBQの，それぞれ中点．

⇦～～は対称性より明らかだが，厳密には，△ALM≡△CNMによって示される．

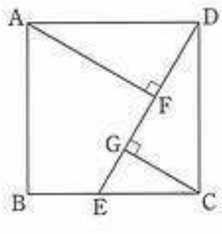
1★ 演習題（解答は，☞p.21）

図のように，正方形ABCDがある．辺BC上に，2点B，Cと異なる点Eをとり，点Dと点Eを結ぶ．点Aから線分DEに垂線をひき，その交点をFとする．また，点Cから線分DEに垂線をひき，その交点をGとする．

（1）　△AFD≡△DGCであることを証明しなさい．

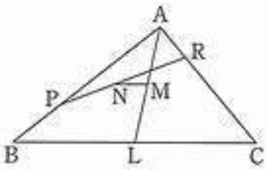
（2）　点Bと点Gを結ぶ．点Gを通り，線分BGに垂直な直線をひき，線分AFとの交点をHとするとき，BG＝GHであることを証明しなさい．

（05　香川県）



2　平行線による証明

右の図は，△ABC において，辺 AB 上に点 P があり，AP：PB=5：2，辺 AC 上に点 R があり，AR：RC=2：5 となる場合を表している．辺 BC の中点を L，頂点 A と点 L を結び，線分 AL の中点を M とする．点 P と点 R を結び，線分 PR の中点を N とし，点 N と M を結ぶ．



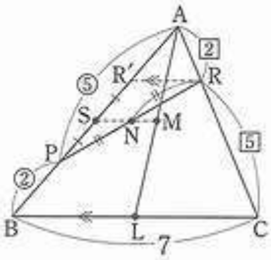
（1）　NM∥BC であることを証明しなさい．

（2）　図において，BC=7 となるとき，線分 NM の長さを求めなさい．　　（07　都立武蔵）

（1）　比の条件をすべて辺 AB 上に集めます．

（2）（1）の補助線が，ここでも役に立ってくれます．

解　（1）　右図のように，R を通って BC に平行な直線と AB との交点を R′とし，PR′の中点を S とする．



△PRR′において，中点連結定理より，

SN∥R′R ……………⑦

⇦☞ p.6.

一方，AR′：R′B=AR：RC=2：5 より，S は AB の中点であるから，△ABL において，中点連結定理より，SM∥BL ………………………④

⇦AR′：R′P：PB=2：3：2
∴　AS：SB
=(2+1.5)：(1.5+2)=1：1

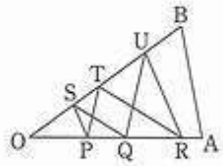
R′R∥BL と⑦，④より，N，M はともに'S を通って BC に平行な直線'上にあるから，NM∥BC である．

（2）（1）より，$SM=BL\times\frac{1}{2}=\left(BC\times\frac{1}{2}\right)\times\frac{1}{2}=\frac{7}{4}$ …………⑨

また，$SN=R'R\times\frac{1}{2}=\left(BC\times\frac{2}{2+5}\right)\times\frac{1}{2}=1$ ………………⑤

∴　NM=⑨−⑤$=\frac{3}{4}$

【類題①】★　図のように，△OAB の辺 OA 上に異なる 3 点 P，Q，R があり，辺 OB 上に異なる 3 点 S，T，U がある．PS∥RU および PT∥QU であるとき，QS∥RT となることを証明しなさい．
（07　慶應志木）



⇦解答は，☞ p.137.

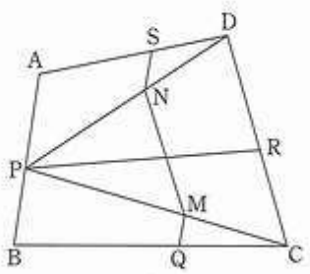
2★ 演習題（p.21）

右の図の四角形 ABCD において，点 P，Q，R，S はそれぞれ辺 AB，BC，CD，DA 上にあり，AP：PB=DR：RC=5：4，AS：SD=BQ：QC=3：2 である．また，点 M，N はそれぞれ線分 PC，PD 上にあり，SN∥AB，MQ∥AB である．

このとき，次の（1），（2）を証明しなさい．

（1）　MN∥CD

（2）　PR と QS との交点を T とするとき，PT：TR=3：2 である．
（06　灘）



●直線図形(1)●
演習題の解答

1 (2) (1)の合同より，もう1組の合同な三角形が生まれ，そこから，平行四辺形が(さらに，2個の直角二等辺三角形まで！)現れます．

解 (1) △AFDと△DGCにおいて，

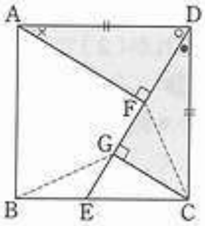
AD=DC ……①

また，右図で，

×+○=90°

●+○=90°

より，×=● ………②



①，②より，

△AFD≡△DGC (斜辺と一鋭角相等)

(2) 右上図で，(1)より，CG=DF……③

∠BCG=90°−∠GCD

=90°−∠FDA=∠CDF ……④

③，④と，BC=CDより，

△BCG≡△CDF (二辺夾角相等) …㋐

∴ BG=CF ……⑤

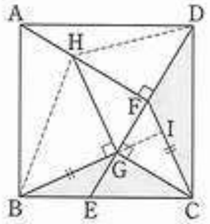
∠BGC

=∠CFD ………⑥

ところで，

∠CFG

=180°−∠CFD …⑦



∠HGF=360°−(90°×2+∠BGC)

=180°−∠BGC ………………⑧

⑥より，⑦=⑧ ∴ CF∥GH …………㋑

これと，CG∥FHより，▱CFHGは平行四辺形であるから，GH=CF

これと⑤より，BG=GH ………………㋒

➡注 ㋐の対応する辺BCとCDは直交していますから，BGとCFも直交し，(2)の図で，BI⊥CFです．このことからも，㋑が分かります．

なお，㋒により，△BGHは直角二等辺三角形ですが，FH(=CG)=FDより，△FDHも直角二等辺三角形です．

2 (2) 図に線分QSを書くと，PRとの交点TはMN上にもありそうです．これを糸口にしましょう．

解 (1) SN∥AB∥MQより，

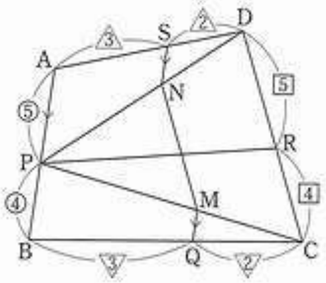
PN : ND=AS : SD=3 : 2

PM : MC=BQ : QC=3 : 2

∴ PN : ND

=PM : MC

∴ MN∥CD



(2) QSとMNの交点をT'とすると，

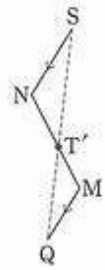
SN∥MQより，

NT' : T'M

=SN : QM

$=AP\times\frac{2}{5} : PB\times\frac{2}{5}$

=AP : PB=5 : 4 ……………㋐



一方，PRとMNの交点をT''とすると，(1)より，

NT'' : T''M

=DR : RC=5 : 4 ……………㋑

㋐=㋑より，T'=T''，すなわち，QS，MN，PRは1点で交わり，この点がTである．

これと(1)より，

PT : TR=PM : MC=3 : 2

3 まず，与えられた**線分比を面積比に変換**します(∠A=90°などの条件から，△ABC，△ADEの面積が求められることにも注意！)．

(3)では逆に，**面積比を線分比に変換**します．

解 (1) AE=EC……㋐ より，

△AEF=△CEF=sとおくと，

△CAF($2s$) : △CBF=AD : DB=1 : 2

より，△CBF=$4s$ …………………………㋑

これと㋐より，△ABF=㋑=$4s$