本書の利用法

本来書物の読み方というものは，一度筆者の手を離れたら後は読み手に任されるべきものだと思います．だから，強制はしたくないのですが，なるべくこうしてほしい，あるいはこういう読み方はしてほしくないという希望を書いておきます．

1. アラカルト方式なのでどの章から読んでも構わないが，全部読んだら，時々寝転がりながらでもよいから「このような解き方があった，これがポイントだったのだな」というように各章の筋を追ってほしい．

計算能力や処理能力は机に向かってノートに書き付けないと伸びていきませんが，見通す力や，定理と問題の関連を見抜く力，全体を見通して作戦を立てていくいわば構成力とでもいえる力は，全体を眺めながらぼんやりと問題相互の関連を考えたりしているときに伸びるものなのです．

2. 各問題は自分で解いてみてほしいが，単に「解く」よりもしてほしいのは，はじめに5分くらいは時間をかけて次のことをすることです．

つまり，

① 自分がその問題についてどのような「武器（手段：考え方）」をもっているかを意識化する．

② あらかじめ「構想」（問題をこうやったら解けるのではないか，こういう手順を踏んでいこう）をどうたてるかを考える．

「はじめに」でも書いたプラス α の力をつけるために一番大切なのは「構想力」です．問題を見て「こうすれば解けるはずだな」とあらかじめ見当をつけてから取り掛かるのと，見当もつけずに無理やり部分部分の計算に走るのとでは実力に雲泥の差があります．

プラス α の実力を身につけたい諸君にとっては，一番大切なのは「ただひたすら標準問題を計算で解くこと」を一歩越えて，「自分で構想を練り，それを解説とつき合わせる」ことで新しい知見を獲得していくことです．

逆に問題があまりにも難しいと感じた場合には，10分くらい経ったら解説を読んでしまって構いません（思考が空転するだけの無駄な時間を過ごすことはありません）．

本書で用いる記号について：

⇨注　初心者のための注意事項．

⇨注　すべての人のための注意事項．

➡注　意欲的な人のための注意事項．

問題の難易は，大学入試問題の難易を1～10に10等分したとき，

A…5以下　B…6，7

B…8，9　D…10

はじめに

本書は03年，04年度に私が「大学への数学」に連載した雑誌記事の中から，大学受験に役立ちそうなものを選んでまとめたものです．

本書を手に取っていただいた方のために，はじめにいくつかの特徴を箇条書きにして説明しておきます．

【本書の特徴】

1. 「考え方のヒント」をアラカルトで解説した参考書であり，網羅的であったり個別の分野についてまとめた本ではないということ
2. いくつかの「思考の大本」となるテーマに対して，筋（お話）を持った解説がなされていること
3. 各問題に対して，「解答」ではなく，どうやって考えていくか，どのように発想するかといった「解説」がなされていること

です．

レベルは大学受験の理系であれば中級のやや上から上級向けで，文系は難関大学を目指す人のレベルになると思います．

上記の特徴でも見て取れるように，本書の意図は，いろいろな「考え方のコツ」や「問題の背景」に触れることで応用力をつけ，実地に問題にあたったときに「計算の迷路」にはまり込まずに見通しよく問題が解けるようにすることです．

確かに入試問題の8割はパターン問題でしかも主に計算力を要求しています．しかし，難関大学になるほど，パターン問題の率は減り，東大に至ってはよほど習熟していないとパターンすら見抜けなかったり，計算の迷路にはまって時間を大幅にロスしたりするものです．

受験直後の受験生の感想を聞いたり，「大学への数学」の「受験報告」を見るたびに，「ああ，この一問を見通しよく解いていれば楽だったのにな」「おやおや，コツがつかめていないため計算地獄に陥ったな」と私は思うことが多いのです．

計算は大切だが，それだけではやや足りない．そうしたプラス α の部分が本書にはつまっていると思います．面白い問題に数多く触れ，そうした面白さの中からエッセンスを抽出し，楽しみながらプラス α の実力を身につけてもらいたい．

そんな本として座右においてもらえれば，筆者としてこの上ない喜びです．

大学への数学

難関大入試数学・解決へのアプローチ

▶栗田 哲也 著◀

CONTENTS

整数

§1　単純な事実に利用価値

初回は，単純な事実に意外にもすごく利用価値がある話をします．一見アタリマエに見えることが，いざ使用するとなるとものすごい威力を発揮することがあるのです．

でも，あまりにも単純な事柄については，誰も利用方法を教えてくれません．教科書にすら載っていない場合があります．だから，その利用方法は自分で工夫して開発するしかないのです．

今回は，そうしたアタリマエな事実に注意をうながそうというお話です．君たちは次の２つの事実がアタリマエに思えますか？

【事実１】

自然数 a，b，c，d について，a と b が互いに素であり，しかも $ad=bc$ が成り立つとき，a は c の約数である．

（「互いに素」とは，最大公約数が１であることをいう）

【事実２】

自然数 a，b，c について，a と b が互いに素であり，しかも $ab=c^2$ が成り立つとき，a も b も平方数（整数の２乗の形で表される数）である．

おそらく，どちらもよく考えてみればアタリマエもいいところでしょう．

事実１については，次のような説明が可能です．即ち，$d=\dfrac{bc}{a}$ としたとき，左辺は整数であるから，右辺は約分することによって整数にならざるをえないが，a と b は仮定により約分できないから，c が a で割り切れなければマズい．

まあ，こんな説明をしなくても，はじめから事実１はアタリマエと思う人が多いかもしれません．

事実２については，次のような説明が可能です．即ち，a または b が１のときはアタリマエ．それ以外の場合を考えると，a が平方数でなければ，a

を素因数分解したときpを素数として「pの奇数乗」という因数が現れるはずである．ところがaはbと互いに素だから，abを素因数分解したときやはりpの指数は奇数のはずだ．これは，右辺が平方数であることに矛盾しているから，aは平方数である．同様にbも平方数である．

でも，こんなくどくどと書かなくても，しばらく考えればアタリマエ(?)ですよね．

ところが，このアタリマエの事実に安心している人が簡単な応用問題を出されると顔面蒼白になることがあるのです．

まずはやってもらいましょう．

1．事実1を使う問題

問題 1

正の整数m，n，lが等式$\dfrac{mn}{m+18}=l+\dfrac{1}{3}$を満たしている．このとき，次の問いに答えよ．

（1） mは3の倍数であることを示せ．

（2） mの最小値を求めよ．

（3） nの最小値を求めよ． （防衛医大）

この問題，出来が大変に悪かったそうなのですが，それは事実1を使えなかったから，としか思えません．

【解説】

（1） 分母を払うとmについての1次式になるのですから，“主役”のmについて整理しようと考えるのは，極めて自然な成り行きでしょう．

$$
\begin{aligned}
\text{与式} &\Longleftrightarrow 3mn=(m+18)(3l+1)\\
&\Longleftrightarrow (3n-3l-1)m=2\cdot 9(3l+1) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\text{☆}
\end{aligned}
$$

と変形して考えれば，実はほとんど瞬間的に(1)～(3)までわかってしまいます．

ポイントは，次を見ぬくことです．

$3n-3l-1$は3で割ると2余る数なので，
素因数分解したとき素因数3をもたない．

つまり，右辺の因数9と$3n-3l-1$は互いに素なので，事実1により，9はmの約数です．

ですから，m は当然 9 の倍数であり，ひいては 3 の倍数でもあります．
（2） m は 9 の倍数なので，$m=9$ のケースがあればこれが m の最小値です．

ところが，実際に元の式に $m=9$ を代入してみると，

$$\frac{9n}{9+18}=l+\frac{1}{3} \Longleftrightarrow \frac{n}{3}=l+\frac{1}{3}$$

であり，目視でも $n=4$，$l=1$ がこれに適することはわかりますから，m の最小値は **9** です．
（3） もう一度式☆を見ると，右辺は明らかに正です．ここでもし，$n=1$ とすると，$3n-3l-1=2-3l<0$ となり，左辺が負になるので，n は 2 以上です．

そこで，$m=9k$，$n=2$ を元の式に代入して調べてみると，

$$\frac{18k}{9k+18}=l+\frac{1}{3} \Longleftrightarrow \frac{2k}{k+2}=l+\frac{1}{3}$$

ここで，右辺の形より，左辺の分数を約分すると分母が 3 になることから，$k+2$ が 3 の倍数となるような k を順に試していくと，$k=4$ のとき，$l=1$ が適します．

よって，n の最小値は **2** です．

*　　　　*　　　　*

このように言われてみればたいしたことのない問題なのに出来が悪いのはなぜでしょうか．

それはおそらく，

- m が主役の問題なのだから m について整理する
- 事実 1

などの基本（アタリマエの事実や手法）を使うのが，意外に難しいからなのだと思います．

ひょっとしたら☆まで導いてから，アタリマエの事実 1 が盲点となって，ハタと鉛筆が止まってしまった人もいるかもしれません．

2. 事実 2 を使う問題

"ピタゴラス数" について考えてみましょう．これは，$a^2+b^2=c^2$ を満たす自然数の組 $(a,\ b,\ c)$ のことです．

$(3,\ 4,\ 5)$，$(5,\ 12,\ 13)$ などがピタゴラス数の代表的なものです．
$(6,\ 8,\ 10)$ もピタゴラス数ですが，これは $(3,\ 4,\ 5)$ を単に 2 倍したもの

なので，あまり重要ではありません．

以下では，a，b，c のどの 2 つも互いに素なピタゴラス数（実は a と b が互いに素なら a，b，c のどの 2 つも互いに素となる）のみについて，考えてみましょう．

ともかく，沢山例をあげてみます．

(3, 4, 5)，(5, 12, 13)，(8, 15, 17)，(7, 24, 25)，(20, 21, 29)，(33, 56, 65)，…

こうした例を注意深く観察してみてください．何か気がつくことはありませんか？

実は 1 番大きな数とそれ以外の数のうち偶数である方を足すと，特別な数になっているのです．

$(3,\ 4,\ 5) \Rightarrow 5+4=9=3^2$

$(5,\ 12,\ 13) \Rightarrow 13+12=25=5^2$

$(8,\ 15,\ 17) \Rightarrow 17+8=25=5^2$

$(7,\ 24,\ 25) \Rightarrow 25+24=49=7^2$

$(20,\ 21,\ 29) \Rightarrow 29+20=49=7^2$

$(33,\ 56,\ 65) \Rightarrow 65+56=121=11^2$

これが偶然であるはずはありませんね．そこで，これを問題に仕立ててみましょう．

問題 2

a，b，c はどの 2 つも互いに素な自然数で，

$$a^2+b^2=c^2 \quad \cdots\cdots①$$

を満たすものとする．次の問いに答えよ．

（1） a，b がともに奇数であるということはありえないことを証明せよ．

（2） a，b のうち偶数である方を d とする．このとき，$c+d$，$c-d$ はともに平方数であることを示せ．

【解説】

今度は事実 2 を用いることになります．

（1） 平方数を 4 で割ったときの余りは，0 か 1 かに限られることに注目します．

奇数の平方 ⇨ $(2k+1)^2=4k^2+4k+1$ を 4 で割ると余り 1.

偶数の平方 ⇨ $(2k)^2=4k^2$ を 4 で割ると余り 0.

よって，a，b がともに奇数であるとすると，

a^2+b^2 を 4 で割ったときの余りは 2 $(=1+1)$ となり，

c^2 を 4 で割ったときの余りは 0 か 1

ですから，式①に矛盾します．よって，a，b がともに奇数であるということはありえません．

（2） a，b は互いに素なので，ともに偶数ということもありえません．そこで，一方は偶数，一方は奇数ということになります．

いま，a，b のうち偶数を d，奇数を e とすると，

$$d^2+e^2=c^2 \Longleftrightarrow e^2=(c+d)(c-d)$$

となり，c は［d^2+e^2 が奇数であることから］奇数となるので，$c+d$，$c-d$ はともに奇数です．

ここで，$c+d$ と $c-d$ は互いに素であることを示しましょう．もしもこのことが示せれば事実 2 よりただちに，$c+d$，$c-d$ はともに平方数になるのです．

［$c+d$ と $c-d$ が互いに素であることの証明］

背理法により示す．

$c+d$ と $c-d$ が共通な素因数 p をもつとすれば，

$$\begin{aligned} c+d&=px \\ c-d&=py \end{aligned} \qquad (x,\ y \text{ は自然数})$$

とおける．ここで，$c+d$，$c-d$ が奇数であることから p，x，y はすべて奇数である．

2 式を辺々加え 2 で割ると，$c=p\cdot\dfrac{x+y}{2}$

2 式を辺々引き 2 で割ると，$d=p\cdot\dfrac{x-y}{2}$

ここで $\dfrac{x+y}{2}$，$\dfrac{x-y}{2}$ はともに自然数だから（x と y がともに奇数だから），c，d はともに p の倍数となり，互いに素であるという仮定に反する．

以上より，$c+d$ と $c-d$ は互いに素であり，$e^2=(c+d)(c-d)$ と事実 2 とから，$c+d$，$c-d$ はともに平方数である．

*　　　　*　　　　*