はじめに

今から30年近く前，まだ私が高校3年だったとき，受験の終わった先輩から使い古した東京出版の「大学への数学」を数冊もらったのが，この出版社とのはじめての出会いでした．もともと数学は嫌いな方じゃなかったのですが，成績が格段良いというわけでもなく，ちょっとやれば多少は成績が上がるかもしれない…程度に思って記事を読み，演習問題を解いていくうちに，「数学って面白いなあ」と思えるようになっていきました….

その後，浪人時代を経て大学生になり，東京出版で答案添削のアルバイトを始めると，問題を解いてまあまあ楽しいといった程度の数学好きの私は，問題の背景にある更に高度な内容に触れたり，全国から寄せられた答案のなかから今まで思いもつかなかったアイデアを教えてもらったりして，また新たに数学に魅力を感じていきました….

そして縁あってある学習塾で働くことになり，そこで中学生を相手に数学を教えるようになりました．正直言って中学の数学なんて簡単だと思っていた私は，すぐそんな考えが愚かだったことを思い知らされます．そこでは簡単，当たり前と思われていたことにも，「それはなんで？」と疑問にもち，独自にカリキュラムを構成し，中学の内容だけでももっと深く，もっと面白く，もっと先を見せることが出来ることをめざしていて，それに向けて日々さまざまな議論がなされていました．私はここで数学がますます好きになっていきました….

そんななか，奇跡的に問題集発行の話が舞い込んできて，この1冊ができあがりました．私が感じた「数学って，とっても素敵なもの！」という思いを何とかここに込めようとしたつもりです．幾何の問題集としては，「証明」の部分にこだわったものになっていて，ついつい相当難しいものまで扱うことになってしまいましたが，2000年以上の歴史を持つ初等幾何の魅力をちょっとでも感じて，ちょっとでもみなさんの勉強の助けになれば幸いです．

2010年6月　おがわ いさお

本書の特色

基本例題：各章で使用する定理の確認と，それらの基本的な使い方をまとめています．また，後半は応用問題的な多少難しめの問題も入れてあります．学習内容がはじめての方は，証明の書き方や問題の考え方を勉強するのに使うといいかと思います．また，学校などですでに勉強されている方でもその分野のまとめとして使えると思います．

発展例題：各章で 2～3 問，典型的な難問を紹介しています．初めての方は読み飛ばして構いません．勉強されている方が読んで，考え方を身につけてほしい問題です．

演習問題：各章で 8～10 問，前半は基本問題を，後半は応用問題をセレクトしてあります．はじめての方や苦手な方は基本例題などを参考にして前半の問題に挑戦して，きちんと証明文が書けたり，式変形が正確にできたりすることをめざしてほしいと思います．勉強されている方は後半の問題中心にとりくんでいってもいいでしょう．また，各問ごとに目標時間を設定してありますが，これはアイデアが思いつくまでの時間で，あくまでもめやすです．時間にゆとりのある方は目標時間は気にしないで，粘り強く考えていってください．

発展問題：各章で 4 問ほど，発展的な問題を取り上げています．標準的な問題ではものたりない方はぜひ挑戦してみてほしいと思います．これでは難しいという方には，誘導をつけて解きやすくしたバージョンもありますので利用してください．

解答について：出来る限り図を多くして，考え方の流れがわかりやすいように工夫しています．また，証明文は極力省略しないで載せています．図を見ながらじっくり証明文を読んで，どういう法則をどういう順番で使っているのかをしっかりつかんで理解を深めていってほしいと思います．

本書の使用方法

① 未習分野のある方

未習分野を勉強される方は，まずは基本例題の解答を図と照らしあわせながら読みすすめて，法則の使い方や考え方の流れをつかんでいきましょう．そのあとに解答の図を見ながら自力で解答をまとめる練習をしたり，演習問題にとりくんでみましょう．また，ルートや展開・因数分解，2次方程式の勉強がまだの方は，そちらの基本を勉強してからとりくんだほうがいいでしょう．

② 数学が好きでどんどん力をつけたい方

すでに学校などで勉強していて幾何には自信のある方は，演習問題や発展問題をたっぷり時間をかけて考えていくといいでしょう．どうしても解けなければ解答をよく読んでみて，しばらくしてからまた挑戦してみてください．

また，必ずしも第1章からはじめることはありません．ひととおり勉強したあとに分野を気にせず，いろいろな章の問題を攻略していくのも効果的なとりくみかたです．

③ 数学に苦手意識を持っている方

すでに勉強していてもなかなか解答が書けないという方は，まずは基本例題の考え方を図を見てつかむことを意識してみましょう．それから解答を見ながらで構わないので，解答を自分でまねて書いてみましょう．その後に時間をおいて図を思い出しながら，極力解答を見ないで自力で解答をまとめてみてください．慣れるまで時間がかかるかもしれませんが，理解して書けるようになるには，難しい問題を背伸びしてやるより，基本的な問題をしっかりこなすことが大切です．

④ 学校の定期試験対策には...

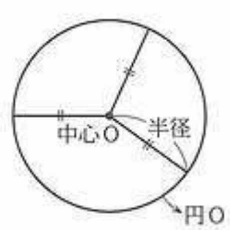
該当分野の演習問題をこなしてみて，できなかった問題を解答を読んで復習してみましょう．時間が無ければ全問やる必要はありません．自分で問題をセレクトして，やれる範囲で一問一問にじゅうぶん時間をかけてとりくんでください．

目　次

カバーイラスト：野中理恵

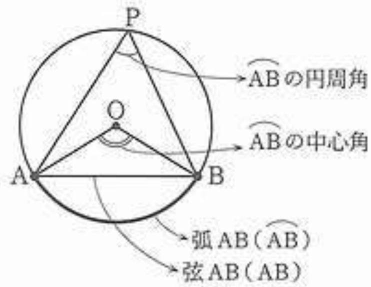
第1章ででてくる定理・公理など

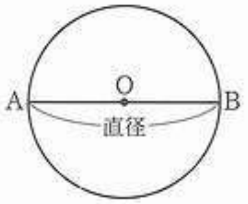
円・中心・半径

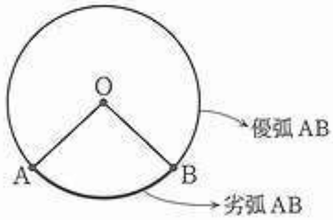


平面上，定点（中心）から等距離（半径）にある点の描く図形を円といいます．よく，中心Oの円を円Oと呼びます．

弧・弦・中心角・円周角・直径



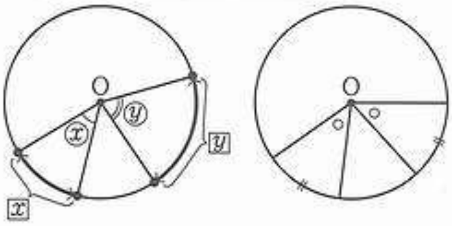




中心Oの円Oにおいて，円周上に2点A，Bをとるとき，円周上でAからBまでの部分を弧ABといい，$\overset{\frown}{AB}$と書きます．AとBを結んだ線分ABを弦ABといいます．これは単にABと書くこともあります．$\overset{\frown}{AB}$と中心Oを結んでできる∠AOBを$\overset{\frown}{AB}$の中心角といい，円周上$\overset{\frown}{AB}$でない部分に点Pをとり，$\overset{\frown}{AB}$とPを結んでできる∠APBを$\overset{\frown}{AB}$の円周角といいます．また，中心Oを通る弦を直径といいます．

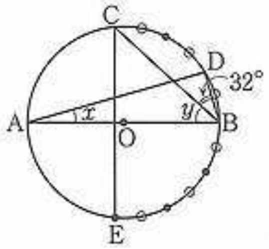
さらに，本書では用いませんが，中心角が180°未満の弧を劣弧，180°を超える弧を優弧ということもあります．

弧と中心角（円の公理）



弧長と中心角は比例します．特に弧長が等しいときは中心角は等しく，中心角が等しければ弧長は等しくなります．

基本例題 1-1（基本の計量）



左図において，AB は円 O の直径で，3 点 C，D，E は円周上の点で，

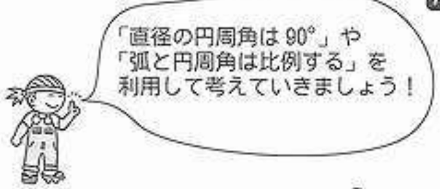
$\overset{\frown}{\mathrm{CD}}:\overset{\frown}{\mathrm{DB}}:\overset{\frown}{\mathrm{BE}}=2:1:3$

$\angle\mathrm{CBD}=32^\circ$

をみたしています．このとき，

$x=\angle\mathrm{BAD}$，$y=\angle\mathrm{ABC}$

を求め，さらに $\overset{\frown}{\mathrm{AE}}:\overset{\frown}{\mathrm{EB}}$ を最も簡単な整数比で求めなさい．

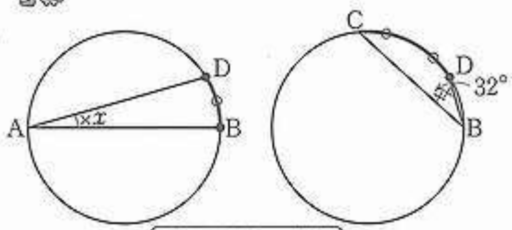


解答　AB は円 O の直径　…………………①

$\overset{\frown}{\mathrm{CD}}:\overset{\frown}{\mathrm{DB}}:\overset{\frown}{\mathrm{BE}}=2:1:3$　…………②

$\angle\mathrm{CBD}=32^\circ$　…………………………③

のとき，



弧と円周角は比例

$\overset{\frown}{\mathrm{DB}}:\overset{\frown}{\mathrm{CD}}=1:2$（②より）

$\angle\mathrm{BAD}:\angle\mathrm{CBD}=1:2$

（弧と円周角は比例）

$\angle\mathrm{BAD}:32^\circ=1:2$

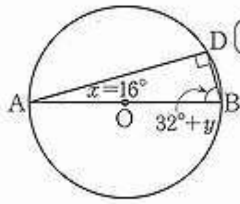
（③より）

$\therefore\ \angle\mathrm{BAD}=\boldsymbol{x=16^\circ}$　…………④

です．ここで①より，

$\angle\mathrm{ADB}=90^\circ$

（直径の円周角）



直径の円周角は 90°

なので，△ABD は左図のようになり，内角の和に注目して，

$16^\circ+(32^\circ+y)+90^\circ=180^\circ$

$\therefore\ \boldsymbol{y=42^\circ}$

です．また，②より，

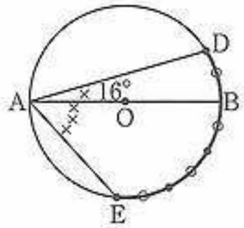
$\overset{\frown}{\mathrm{DB}}:\overset{\frown}{\mathrm{BE}}=1:3$

$\angle\mathrm{BAD}:\angle\mathrm{BAE}=1:3$

（弧と円周角は比例）

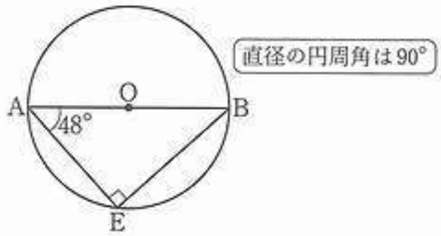
$16^\circ:\angle\mathrm{BAE}=1:3$（④より）

$\therefore\ \angle\mathrm{BAE}=48^\circ$　…………………………⑤



弧と円周角は比例

とわかり，



①より，

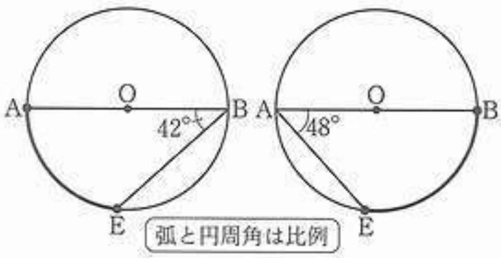
$\angle AEB = 90^\circ$

（直径の円周角）

もわかるので，△ABE は左図のようになり，内角の和に注目して，

$$\angle ABE = 180^\circ - 90^\circ - 48^\circ$$
$$= 42^\circ \quad \cdots\cdots⑥$$

とわかります．すると，



$$\overset{\frown}{AE} : \overset{\frown}{EB} = \angle ABE : \angle BAE$$

（弧と円周角は比例）

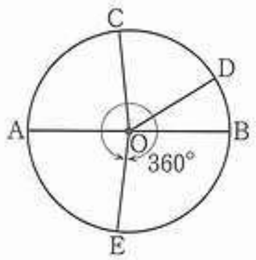
$$= 42^\circ : 48^\circ$$

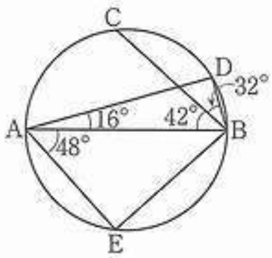
（⑤，⑥より）

$$\therefore \quad \overset{\frown}{AE} : \overset{\frown}{EB} = \mathbf{7 : 8}$$

とわかります．（終）

研究　⑥の $\angle ABE = 42^\circ$ ですが，以下のように求めることもできます．





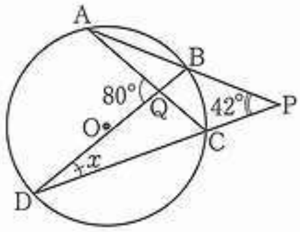
$\overset{\frown}{AC}$，$\overset{\frown}{CD}$，$\overset{\frown}{DB}$，$\overset{\frown}{BE}$，$\overset{\frown}{EA}$ の中心角の合計は 1 周 360° なので，これらの円周角の合計は半分の 180° です．（円周角は中心角の半分より）

よって，

$$\angle ABC + \angle CBD + \angle DAB + \angle BAE + \angle ABE = 180^\circ$$
$$42^\circ + 32^\circ + 16^\circ + 48^\circ + \angle ABE = 180^\circ$$
$$\therefore \quad \angle ABE = 42^\circ$$

とわかります．

基本例題 1-2（円周角の定理を使った計量）



左図において，4 点 A，B，C，D は円 O 上の点で，AB と CD の交点が P，AC と BD の交点が Q です．

$$\angle \mathrm{APD}=42^\circ,\ \angle \mathrm{AQD}=80^\circ$$

のとき，

$$x=\angle \mathrm{BDC}$$

を求めなさい．

解答　$\angle \mathrm{APD}=42^\circ$ ……………………①

$\angle \mathrm{AQD}=80^\circ$ ……………………②

のとき，$\overset{\frown}{\mathrm{BC}}$ に注目して，

$\angle \mathrm{BAC}=\angle \mathrm{BDC}$

（円周角の定理）

$\therefore\ \angle \mathrm{BAC}=\angle \mathrm{BDC}=x$ …………③

です．すると，△ACP に注目して，

$\angle \mathrm{QCD}=\angle \mathrm{BAC}+\angle \mathrm{APD}$

（外角定理）

$=x+42^\circ$ ……………………④

（①，③より）

とあらわせ，さらに △CDQ に注目して，

$\angle \mathrm{AQD}=\angle \mathrm{BDC}+\angle \mathrm{QCD}$

（外角定理）

$=x+(x+42^\circ)$

（③，④より）

$=2x+42^\circ$ ……………………⑤

とあらわせます．よって②，⑤より，

$2x+42^\circ=80^\circ$

$2x=80^\circ-42^\circ=38^\circ$

$\therefore\ x=\mathbf{19^\circ}$

です．（終）