高校入試

1対1の数式演習

本書の利用法

◆ 本書の特色 ◆

本書は，高校受験を目指す人のために，中学数学の数式部門の全範囲をカバーした演習書です．

中学数学を，大きく数式部門と図形部門に二分し，その前者を扱っているということです．「数式」という名称でくくってありますが，そこには"場合の数・確率"や"関数・座標"なども含まれ，要するに，**典型的な図形問題以外のすべての分野をカバーしている**ということになります．

本書の最大の特色は，1つのテーマについて，

‘例題’と‘演習題’の2題が，1対1のセットになって組み込まれている

ということです．すなわち，まず基本～標準レベルの‘例題’とその詳しい解説が提示され，それを熟読・理解した上で，やや発展的な‘演習題’を自力で解いてみる――という流れになっています．それにより，そのテーマについての理解がより深まり，自分の中にしっかり定着させることができるはずです．

本書は，月刊誌『高校への数学』で使用されている難易度

A…基本，B…標準，C…発展，D…難問

の**BとCランクの問題で構成**されています．すなわち，**教科書レベルの基本は一通りマスターしている人が，中堅～難関の高校受験レベルにまで実力をアップさせるのに最適な演習書**といえます．このような受験生はもとより，中高一貫校で中学範囲の数学の完成を目指す人などにもおすすめの一書です．

◆ 本書の構成 ◆

本書は，中学の数式部門を，以下の6つの章に構成しました．

そして各章は，「要点のまとめ」，「例題の問題と解答＆演習題の問題…㋐」，「演習題の解答」の3つのパーツからなり，さらに第5章と第6章には1つずつ「ミニ講座」も設けられています．また，巻末には，各章にちりばめられた「類題の解答」がまとめられています．

メインのパーツである㋐では，‘例題’と‘演習題’のペアを(原則として)1ページに収めてあります．‘例題’については，問題の下に解説を載せ，すぐにその問題の攻略法が学べるようになっています．解答への指針としての**前書き**と詳しい**解答**に加えて，**別解**，**注**，**研究**，さらには**類題**まで，盛り沢山の内容です．そして，それらの右側には，行間を埋める**補足事項**が懇切丁寧に記されています．

‘例題’の解説が一通り理解できた後は，その下の‘演習題’にチャレンジしてみましょう．その解説は，章末にまとめられています．ここもしっかりと読みこなして，ゆるぎない実力を身に付けましょう．

◆ 本書で使われている記号 ◆

★………問題番号の右肩に付いている場合は，**難易度がＣランクの発展問題**であることを表します．また，「要点のまとめ」などの解説部分に付いている場合は，その内容が**やや高度な発展事項**であることを表します．

解……その問題の本解を表します．

別解……本解に対する別解を表します．

➡注……解答の補足や問題の背景等々の注意事項です．

■研究…その問題についての一般論や，高校（以上）で学ぶ内容などの発展事項が述べられています．

【類題】…その問題の類題を紹介してあります．これにもぜひチャレンジしてみましょう（解答は，巻末にあります）．

⇦，⬅…'例題' の解説部についての補足事項です．特に「⬅」は，**ぜひ確認してほしい重要事項**を表します．

＊　　　　＊

その他，重要部分は**太字**になっていたり，網目がかけられていたり，傍線（～～や――など）が引かれていたりと，読者の皆さんに注目してもらえるような工夫が満載です！

◆ 他の増刊号との連携 ◆

書名の示す通り，本書は，中学数学の数式部門についての演習書です．同じ数式部門についての解説書である**『数式のエッセンス』**を併せて読めば，数式についての理解がより深まるでしょう．

また，図形部門についても同様に強化したいときには，本書の姉妹編である**『１対１の図形演習』**さらには解説書の**『図形のエッセンス』**をぜひお読み下さい．

数式＆図形をすべて含んだ演習書としては，以下の３冊シリーズがあります．

㋐ **『レベルアップ演習』** ………Ａが中心
㋑ **『High スタンダード演習』**…Ａ～Ｂ
㋒ **『日日のハイレベル演習』** …Ｃ～Ｄ

本書の難易度は，前述のように「Ｂ～Ｃ」なので，**㋑と㋒の中間の難易度**といえます．本書を一通り学習し終えて，難易度Ｄランクの超難問を体験したい人は，『日日のハイレベル演習』に進んでみて下さい．

第1章　式の計算

ここでは，数学のあらゆる分野の基盤となる"式の計算"を扱う．とは言っても，以下で演習するのは，標準レベル以上の計算問題，およびその応用問題が中心である．易しい(機械的な)計算問題は取り上げていないので，計算練習が必要な人は，他の問題集などで十分に鍛えてから取り組むようにしよう．

第1章　式の計算
要点のまとめ

1．展開・因数分解

1・1　展開の公式

Ⅰ．$(x+y)^2=x^2+2xy+y^2$

Ⅱ．$(x-y)^2=x^2-2xy+y^2$

Ⅲ．$(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$

Ⅳ．$(x+y)(x-y)=x^2-y^2$

*　　　　　*

次の2つも，覚えておくと便利．

Ⅰ＋Ⅱより，$(x+y)^2+(x-y)^2=2(x^2+y^2)$

Ⅰ－Ⅱより，$(x+y)^2-(x-y)^2=4xy$

1・2　因数分解の公式

展開の公式Ⅰ～Ⅳの左辺と右辺を逆にすると，因数分解の公式が得られる．すなわち，

Ⅰ．$x^2+2xy+y^2=(x+y)^2$

Ⅱ．$x^2-2xy+y^2=(x-y)^2$

Ⅲ．$x^2+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b)$

Ⅳ．$x^2-y^2=(x+y)(x-y)$

1・3* 'たすきがけ' による因数分解

1・1のⅠ～Ⅳにはないが，

$$(ax+b)(cx+d) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ①$$
$$=acx^2+(ad+bc)x+bd \quad \cdots\cdots ②$$

が成り立つ．これを逆にすると，「②→①」と因数分解されるが，ここで，右のような 'たすきがけ' という手法が用いられる．

a	b	bc
c	d	ad
ac	bd	$ad+bc$
(x^2の係数)	(定数項)	(xの係数)

1・4　指数の計算規則（指数法則）

$a\neq0$；m，n は自然数として，

Ⅰ．$a^m\times a^n=a^{m+n}$

Ⅱ．$a^m\div a^n=\begin{cases} a^{m-n} & (m>n \text{ のとき}) \\ 1 & (m=n \text{ のとき}) \\ \dfrac{1}{a^{n-m}} & (m<n \text{ のとき}) \end{cases}$

Ⅲ．$(a^m)^n=a^{mn}$

Ⅳ．$(ab)^n=a^nb^n$

*　　　　　*

特に，ⅠとⅢを混同しがちなので，注意しよう．

2. 平方根

2・1　数の分類

中学までに習う数は，以下のように分類される．

$$\text{数}\begin{cases}\text{有理数}\begin{cases}\text{整数}\\ \text{分数}\begin{cases}\text{有限小数(で表される数)}\\ \text{循環小数(で表される数)}\end{cases}\end{cases}\\ \text{無理数}\end{cases}$$

*　　　　　*

無理数は，**有理数以外の数**であり，循環しない無限小数で表される．

［例］　$\sqrt{7}=2.645751\cdots$

　　　$\pi=3.141592\cdots$

2・2　$\sqrt{}$ の計算規則

Ⅰ．$\sqrt{a^2}=\begin{cases}a & (a\geqq 0\text{ のとき})\\ -a & (a<0\text{ のとき})\end{cases}$ ………①

Ⅱ．$(\sqrt{a})^2=(-\sqrt{a})^2=a\ (a\geqq 0)$

Ⅲ．$\sqrt{a}\times\sqrt{b}=\sqrt{ab}\ (a\geqq 0,\ b\geqq 0)$

Ⅳ．$\sqrt{a^2b}=a\sqrt{b}\ (a\geqq 0,\ b\geqq 0)$

Ⅴ．$\sqrt{a}\div\sqrt{b}=\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\dfrac{a}{b}}\ (a\geqq 0,\ b>0)$

Ⅵ．$\dfrac{1}{\sqrt{a}}=\dfrac{\sqrt{a}}{a}\ (a>0)$

Ⅶ．$m\sqrt{a}+n\sqrt{a}=(m+n)\sqrt{a}\ (a\geqq 0)$

*　　　　　*

①は，間違い易いので，注意しよう．

なお，Ⅳの応用として，次のような計算方法は，(三平方の定理を使う場面などで)有効である．

$$\sqrt{40^2-32^2}=\sqrt{8^2(5^2-4^2)}=8\sqrt{5^2-4^2}$$
$$=8\times 3=24$$

2・3　分母の有理化

2・2 のⅥは，$\dfrac{1}{\sqrt{a}}=\dfrac{1\times\sqrt{a}}{\sqrt{a}\times\sqrt{a}}=\dfrac{\sqrt{a}}{a}$

として得られるが，このように，分母を有理数にすることを，分母の有理化という．

次のようなタイプでの有理化は，**1・1** のⅣの公式に結び付ける($a>0,\ b>0,\ a\neq b$)．

$$\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})}$$
$$=\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{(\sqrt{a})^2-(\sqrt{b})^2}=\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{a-b}$$

3. 方程式・不等式

3・1　2次方程式の解き方

2次方程式 $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq 0)$ ……①の解き方は，以下のようである．

Ⅰ．因数分解の利用

①の左辺が，$a(x-p)(x-q)=0$ ……②と因数分解されるとき，$x=p,\ q$

Ⅱ．平方の形を利用

①を変形して，$(Ax+B)^2=C$ $(C\geqq 0)$の形になるとき，$Ax+B=\pm\sqrt{C}$（以下略）

Ⅲ．解の公式

①の解は，$x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ ……③

この③を，解の公式という（Ⅱと同様の変形により証明される）．

なお，特に $b=2b'$（偶数）のとき，③は，

$$x=\frac{-b'\pm\sqrt{b'^2-ac}}{a}$$

3・2　方程式の解

方程式の解が分かっているときは，その値を元の方程式に代入した式が成り立つ．

例えば，3・1 の①の解（の1つ）が $x=p$ のとき，$ap^2+bp+c=0$ が成り立つ．

3・3　解と係数の関係

3・1 の①の2解が，$x=p,\ q$ のとき，①の左辺は②のように因数分解されるから，①と②の左辺同士の係数を見比べて，

$$b=-a(p+q),\ c=apq$$

$$\therefore\ p+q=-\frac{b}{a},\ pq=\frac{c}{a}\ \cdots\cdots\cdots\cdots④$$

④の2式を，（2次方程式の）解と係数の関係という．

3・4　1次不等式の解き方

1次不等式を整理して，$ax>b$ $(a\neq 0)$になったとき，

$$a>0 \text{ なら，} x>\frac{b}{a}\ ;\ a<0 \text{ なら，} x<\frac{b}{a}$$

*　　　　*

不等式の両辺に負の数をかけると，**不等号の向きが逆になる**ことに注意しよう．

3・5　不等式同士の計算

$a>b,\ c>d$ のとき，$a+c>b+d$

さらに，$a\sim d$ がすべて正なら，$ac>bd$

*　　　　*

不等式同士のたし算は常に行ってよく，また，すべてが正のときはかけ算も行える．ただし，不等式同士の引き算や割り算は行ってはならない．

1　因数分解

次の各式を因数分解しなさい．

（1）$(x^2+6x)^2-2(x^2+6x)-35$　（09　城北）

（2）$(x^2-3x-4)(x^2-3x+3)+6$　（07　早稲田実業）

（3）$x^2-6xy-3x+9y^2+9y+2$　（07　豊南）

（4）$a(b^2-1)+b(a^2-1)$　（07　関西学院）

（5）$(x+y)(2x-3y)-(x-2y)^2+9y^2$　（09　土佐塾）

（6）$x^2-(3y-z)x-yz+2y^2$　（08　市川）

因数分解は，一歩でも方向を誤ると‘五里霧中’にもなりかねません．各問ごとに，最適の一歩を注意深く探りましょう．

⇦例題，演習題とも，
（1），（2）…1文字
（3）～（5）…2文字
（6）…………3文字
の因数分解．

解　（1）$x^2+6x=A$ とおくと，

与式$=A^2-2A-35=(A+5)(A-7)$

$=(x^2+6x+5)(x^2+6x-7)$ ……………………①

$=\boldsymbol{(x+1)(x+5)(x-1)(x+7)}$

⬅（1）も（2）も，展開すると4次式になってお手上げ．ともに，**‘カタマリに着目’**しよう．

（2）$x^2-3x=A$ とおくと，

与式$=(A-4)(A+3)+6=(A^2-A-12)+6$

$=A^2-A-6=(A+2)(A-3)$

$=(x^2-3x+2)(x^2-3x-3)$ ……………………②

$=\boldsymbol{(x-1)(x-2)(x^2-3x-3)}$

⇦①や②でやめてしまわないように注意（②の (x^2-3x-3) は，有理数係数の範囲では，これ以上因数分解できない）．

（3）与式$=(x^2-6xy+9y^2)-3x+9y+2$

$=(x-3y)^2-3(x-3y)+2$

$=\{(x-3y)-1\}\{(x-3y)-2\}$

$=\boldsymbol{(x-3y-1)(x-3y-2)}$

⇦（3）‘カタマリ’を見抜きたい．

（4）与式$=ab^2-a+ba^2-b=(ab^2+a^2b)-(a+b)$

$=ab(a+b)-(a+b)=\boldsymbol{(a+b)(ab-1)}$

⇦（4）展開して，**適当なペアを作る．**

（5）与式$=(x+y)(2x-3y)-\{\underline{(x-2y)^2-9y^2}\}$ ……………③

ここで，〰〰$=\{(x-2y)+3y\}\{(x-2y)-3y\}=(x+y)(x-5y)$

∴　③$=(x+y)\{(2x-3y)-(x-5y)\}=\boldsymbol{(x+y)(x+2y)}$

⇦（5）全部展開してもよいが，まず，〰〰の「A^2-B^2」**の形に着目**してみる．

（6）与式$=x^2-3yx+zx-yz+2y^2=z(x-y)+x^2-3xy+2y^2$

$=z(x-y)+(x-y)(x-2y)=\boldsymbol{(x-y)(x-2y+z)}$

⬅（6）複数の文字の因数分解では，**より低次の文字について整理する**のが定石．

1　演習題（解答は，☞p.26）

次の各式を因数分解しなさい．

（1）$(2x^2+3)^2-2x(2x^2+3)-35x^2$　（06　灘）

（2）* $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)-3$　（09　京都学園）

（3）$x^2+(a+7)x-6(a-2)(a+1)$　（06　久留米大附）

（4）$a^3-ab^2-3a^2b+3b^3+a^2-b^2$　（07　早大本庄）

（5）$16a^2+2a-4(b-3)^2-(b-3)$　（08　函館ラ・サール）

（6）$a^2-b^2-4c^2-6a+4bc+9$　（05　芝浦工大柏）