はじめに

微積分は，いわば無限を相手とする数学といえます．

もちろん，微積分以前の整方程式や不等式，整関数のグラフ，指数・対数関数，3角関数についても，実数の連続性，関数の連続性がその前提にあるので，やはり，〝無限〟がその基底にあるのですが，そこの〝無限〟はいうならば直観を許容するものです．

$x \to 2$ のとき $3x \to 6$

というのは当然のことと認められましょう．

しかし，数Ⅲにおいて，いろんな関数をあつかうようになると，そのような直観はあやしくなってきます．

たとえば，$x \to 0$　のとき $\dfrac{\sin x}{x}$ は？　とか，

$x \to 0$　のとき $\dfrac{a^x - 1}{x}$ は？　などとなりますと，数Ⅲ以前のような直観は受けつけてくれないでしょう．そこに，数Ⅲのむずかしさがあるのです．

極限は微積分の基礎ですから，微積分の問題をあつかう以上，まず極限について，定義や定理を厳密に用意してかからなければなりません．

数列の極限とはなにか，関数の極限とはなにか，どんな数列，関数に極限が存在するといえるのか，あるいは極限が判定できるのか，などです．

しかし，そうすると，論理の展開が厳密であるほど，理解するのがむずかしくなってきます．数Ⅲの教科書をあけたとたん，はじめから理解しがたい定義や定理が並んでいたのでは，学ぶものはうんざりして学習の意欲を失いかねません．まして，教養としての高校課程の教科書で，そのようなことは望むべくもないことです．

そこで，教科書では，数Ⅲにおいても，微積分の基礎となる定理に対し，できるだけ直観に委ねようとすることになります．そこでは，ある程度，いわば〝ごまかし〟の手段をとらざるをえないわけです．

数Ⅲの微積分については，問題ができるひとでも，やさしいとおもっているひととむずかしいとおもっているひととにわかれます．前者は早合点するタイプのひとに多く，後者は考えこむタイプのひとに見うけられます．

数Ⅲの微積分について，やさしいとおもうひとは，教科書の〝ごまかし〟にうまくのせられているのでしょう．

ともかく，教科書がそうである以上，必要な定義は理解し，主要な定理，公式は，たとえそれが証明ぬきであっても記憶しておかねばなりません．

たとえば，ロールの定理は，適当な関数 $y=f(x)$ のグラフをかいて，グラフ上でその意味を理解し，ベキ関数 $y=x^\alpha$（α は実数）に対しては $y'=\alpha x^{\alpha-1}$ とおぼえ，連続でその導関数も連続である関数 $y=f(x)$ の表す曲線の $x=a$ から $x=b$（$a<b$）までの部分の長さは $\int_a^b \sqrt{1+f'(x)^2}\,dx$ であたえられると記憶しておくことです．

すなわち，問いつめるより，まず慣れることです．

＊　　＊　　＊

この本では，まず原則編として，数Ⅲにおける微積分のために必要な定義，定理，公式に慣れるために，基本的な問題を考察することからはじまります．それによって，問題に対してどのような定義，定理，公式が用いられるかがしだいにあきらかになり，定義，定理，公式に対する理解も深まりましょう．

しかし，数学においては，定義や定理などを一応理解したからといって，それでいろんな問題が解けるというわけにはいきません．問題を解くには，それに対してもっとも適切な定理，公式をもってくるという選択の能力がなければなりません．

そのために用意されているのが，実戦編です．ここでは，問題のとらえかた，定理，公式のベストの用いかたを学ぶことでしょう．

体系編には，できるだけ〝ごまかし〟のない微積分の基礎としての定義，定理が用意されています．教科書における定義にあきたらないとき，教科書の証明ぬきの定理について証明が知りたいとき，微積分の基礎を理解したいとき，どうぞご利用ください．

本書の利用法

諸君は，どのようにして自転車にのれるようになったか，幼い日のことを思いだしてほしい．おそらく，

1° まず，兄さんなどに倒れないように支えてもらっての練習．

2° つぎに，自分だけでときどきひっくりかえりながらの練習．

という順序であろう．このような感覚的・実戦的練習のまえに，

0° 自転車の構造についての勉強．

−1° スタンドを立てての練習．

を加えた人は，ほとんどいないと思われる．のりこなせるようになった現在も，マニアやプロをめざす人を除いて，ほとんどの諸君は 0° には無関心のままであろう．

本書「解法の探求・微積分」では，

原則編，実戦編，体系編

の順序による三部構成としたが，これらは順に，自転車の 1°，2°，0° に対応する．0° ぬきに自転車をのりまわすことはできるし，自転車にのる楽しさを知らないで，0° に熱をあげるのは無意味である，という理由で

体系編：微積分の，できる限り直観を排除した理論体系について

を最後に配置したわけである．

［1］ 原則編について：

微積分を，視覚などの感覚を通して理解し，入試の標準問題をスムーズに解ける応用力を身につけてもらうことが，原則編の目標である．

講義と問題演習とからなるが，問題数は約 150 題で，その項目にそっている'テーマが明確な問題'に限定した．しかし，自転車の −1° に相当するきわめて初歩的な問題は入れていない．そういう練習を何年続けたところで，少しも自転車にのれるようにはならない，と思われるからである．むしろ，初歩の人にとって少しキツイ問題も入れてある．そういう問題には，＊印をつけておいたが解けなくても心配はいらないし，実戦編をおえてから挑戦してもよい．

なお，現行課程では，弧長は範囲外（発展扱い）になったが（京大では出題範囲内），本書では該当部分に◆マークをつけておいた．

［2］ 実戦編について：

原則編だけでも，ある程度は入試に通用するだろうが，とくに数Ⅲの入試問題は総合的である．原則編でとりあげたテーマが明確な問題ではなく，いくつかのテーマが複合されている問題や，テーマが不明確でそれを見ぬくことがポイント，という問題が入試では主流である．

ここでは，そういう数Ⅲの総合的理解を必要とする問題を，できる限りヒントや先入観を諸君に与えないで，解いてもらうことにする．自転車の話でいえば，独力による 2° に相当する．ひっくりかえり，電柱などにぶつかりながら，たくましい実戦力・応用力を身につけてほしい．

問題数は約 120 題で，いたずらな難問は入れてないが，現実味があって興味深い問題，あるいは解くことによって多くのものが得られる問題を，膨大な入試問題から精選したつもりで，どの問題もかなりの手ごたえはあるだろう．

なお，とても有効なのに現行課程では範囲外（発展扱い）になった微分方程式（京大では課題）を，実戦編で軽くとりあげた．

［3］ 体系編について：

原則編と実戦編では，微積分の感覚的・実感的な理解を目標にしたわけで，入試は幸い，そういう理解で十分に通用する．

しかし，それだけでは不満だと
う人や，純粋な論理展開による抽
的体系の世界に魅力を感じる人も
るだろう．

そういう興味をもつ人や，プロ
めざす人に読んでほしいのが，こ
体系編である．高校の程度をかな
超える部分もあるが，感覚にたよ
ないとすれば，無限を扱うだけに
どうしても論法がきびしくならざ
をえない．教科書などでは省略さ
ている緻密な論理展開をここで見
だすことができるであろう．

［4］ 仕上げのための良問集について

原則編，実戦編でとりあげた問
のほとんどは昭和の時代の入試問
である．平成の今も演習問題とし
は十分に通用するが，最近の出題
向をふまえての入試対策という点
はここ数年の問題に勝るものはな
ここでは，近年の頻出問題や結論
興味深い問題を中心に，仕上げに
さわしい 16 題をとりあげた．

極端な難問はないので，本番を
定して解いていただきたい．

［5］ Q&A／読者の研究室について

本書の前身である「解法の探求Ⅱ
の発刊以降，例月の大学への数学
'微積の広場' などの記事で，「解
の探求Ⅱ」に関する読者からの質
や別解を扱ってきた．その中でも，
とくに目立って多い質問と諸君に
非とも紹介したい別解とを 4 ペー
にまとめたものである．

なお本書では，以下の記号も使
⇨注…初心者のための注意事項
⇨注，▨研究…すべての人のた
の注意，研究
➡注，■研究…意欲的な人のた
の注意，研究

解法の探求・微積分

目 次

●原則編1

極限の定理と公式

極限は微積分の前提となるもの．極限(1)，(2)
では，微積分を知らないものとして，数式の
変形による極限値計算の方法を考えてみよう

極限(1)●

微積分の体系において，極限はいわば第一走者であるが，極限概念で組みたてられた微分法・積分法の定理や公式を使って，逆に極限の問題を考えることもある．この微積分のアンカーとしての極限は，こまかなことをいえば循環論法的ではあるが，すでに学んだことをあらゆる分野で活用しよう，というのは勉強の基本的姿勢である．極限にかぎらず，たとえ体系的には前後するにしても，知っていることは積極的に活用しよう．

しかし，この極限(1)とつぎの極限(2)では，とりあえず，第一走者としての極限に限定して話をすすめることにする．さて，極限の問題を形式的に分割すると，

1°　$\begin{cases}\text{微積分を使わない極限}\\ \text{微積分を使う極限*}\end{cases}$

2°　$\begin{cases}\text{数列の極限}\begin{cases}a_n\,(n\to\infty)\ \text{がどうなるか}\\ \text{級数（初項〜無限大項の和）**}\end{cases}\\ \text{関数の極限}\end{cases}$

3°　$\begin{cases}\text{等式変形で処理する}\\ \text{不等式変形で処理する}\end{cases}$

というような分割方法が考えられるが，ここでは，1°の*を省略するわけである．さらに，2°の**もあとまわしにする．すると，あとで述べるように，数列の極限と関数の極限とはほとんど同じことなので，けっきょく，

微積分を使わないで $\begin{cases}\textbf{等式変形で処理する}\\ \textbf{不等式変形で処理する}\end{cases}$

という骨組みが残る．極限(1)，(2)ではこれに肉づけをしていくことにしよう．

1．公式と定理

証明ぬきに使ってよい極限に関する公式は，

(イ)　$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$　　(ロ)　$\displaystyle\lim_{x\to\infty}a^x=0\ (|a|<1)$

(ハ)　$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$　　(ニ)　$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$

の4つぐらいしかない．また，定理も，

［1］ **lim は分配できるという定理：**

$\displaystyle\lim_{x\to a}f(x)$，$\displaystyle\lim_{x\to a}g(x)$ がともに存在するとき，

（以下，［1］，［2］で lim の下の $x\to a$ を省略する）

1°　$\lim\{f(x)\pm g(x)\}=\lim f(x)\pm\lim g(x)$

2°　$\lim\{f(x)g(x)\}=\lim f(x)\lim g(x)$

3°　$\displaystyle\lim\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim f(x)}{\lim g(x)}$

［2］ **はさみうちの原理：**

$\lim f(x)$ を知りたいとき，

$p(x)\leqq f(x)\leqq q(x)$，$\lim p(x)=\lim q(x)=\alpha$

をみたす $p(x)$，$q(x)$ があれば，$\lim f(x)=\alpha$

⇨注　［1］，［2］ともに a が $\pm\infty$ のときも通用する定理である．［1］3°はもちろん $\lim g(x)\neq 0$ の場合．

の2つぐらいのものである．（［1］，［2］ともに直感的にあきらかだとしてよく，証明はどうするのか思い悩むことはない．）

以上の数少ない公式と定理を組みあわせて，いろいろな極限を求めることになる．

例題 1．任意の実数 a_1，b_1，c_1 に対して

$$a_n=\frac{b_{n-1}+c_{n-1}}{2},\ b_n=\frac{c_{n-1}+a_{n-1}}{2},$$

$$c_n=\frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2}\ (n=2,\ 3,\ \cdots)$$

とおくとき，

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}b_n=\lim_{n\to\infty}c_n=\frac{a_1+b_1+c_1}{3}$$

となることを示せ．（学習院大）

自分で考えるまえに，つぎの解答を見てください．

［解答？］ 行数を節約するため $-1/2$ を r とおくと

第1，2式により，$a_n-b_n=r(a_{n-1}-b_{n-1})$

第1，3式により，$a_n-c_n=r(a_{n-1}-c_{n-1})$

第1〜3式により，

$$a_n+b_n+c_n=a_{n-1}+b_{n-1}+c_{n-1}$$

したがって，　$a_n-b_n=r^{n-1}(a_1-b_1)$ ………①

$a_n-c_n=r^{n-1}(a_1-c_1)$ ………②

$a_n+b_n+c_n=a_1+b_1+c_1$ …………③

$n\to\infty$ のとき①の右辺は0に収束する（∵ 公式(ロ)）から，a_n と b_n は同じ値に収束し，同様に②から a_n と c_n は同じ値に収束する．

よって，③とから，a_n，b_n，c_n は $n\to\infty$ のとき，ともに $\dfrac{a_1+b_1+c_1}{3}$ に収束する．（おわり）

これは零点に近い解答である．というと，ドキッとする諸君が多いだろうが，心をおちつけて[1]の分配定理を見なおしていただきたい．

――の部分をくわしく述べると（lim の下の $n\to\infty$ は省略する），

①により，$\lim(a_n-b_n)=0$ ………………………Ⓐ

∴ $\lim a_n-\lim b_n=0$ ………………………Ⓑ

∴ $\lim a_n=\lim b_n$

となる．Ⓐは問題ないが，Ⓐ→Ⓑは $\lim a_n$，$\lim b_n$ の存在を示しておかないといえないのである．問題の要求はもちろん『$\lim a_n$，$\lim b_n$，$\lim c_n$ が存在して，しかもその値が……となることを示せ』であって，問題の a_n などの与えられかたでは，$\lim a_n$ などの存在はすこしもあきらかではない．

この難関があるために，本問は難問だといってよいがじつは，[1]の分配定理をつぎのように使うことによって切りぬけることができる．

解　[上の①〜③につづいて]

$$3a_n=(a_n-b_n)+(a_n-c_n)+(a_n+b_n+c_n)$$

であり，この3つの(　)はともに収束するから，[1]の1°により，$\lim 3a_n=3\lim a_n$（∵ [1] 2°）は，

$$\lim(a_n-b_n)+\lim(a_n-c_n)+\lim(a_n+b_n+c_n)$$
$$=0+0+(a_1+b_1+c_1)=a_1+b_1+c_1$$

よって，$\lim a_n$ は $\dfrac{a_1+b_1+c_1}{3}$（$=\alpha$ とおく）に収束する．したがって，再び[1]の1°により，

$$\lim b_n=\lim\{a_n-(a_n-b_n)\}$$
$$=\lim a_n-\lim(a_n-b_n)=\alpha-0=\alpha$$
$$\lim c_n=\lim\{a_n-(a_n-c_n)\}$$
$$=\lim a_n-\lim(a_n-c_n)=\alpha-0=\alpha$$

*　　　　　　*

分配定理の使いかたおよび注意すべきことを述べたわけであるが，一目で $\lim f(x)$，$\lim g(x)$ の存在があきらかなことが多い．そういうときは，なにもいわないで分配させてよいだろう．

つぎに，はさみうちの原理について．

例題 2.　前ページの公式(ロ)を，$0<a<1$ として証明せよ．

たとえば0.9をどんどん掛けていけば，0に近づいていくことはあきらか，ということで‘あきらか’以外にいうことナシ，といいたくなるだろうが，このあきらかの部分をなんとか説明してほしいという問題である．

問題の極限 $\lim\limits_{x\to\infty}a^x$（$x$ は実数）は，‘関数の極限’であるが，とりあえずは，

数列の極限：$\lim\limits_{n\to\infty}a^n$（$n$ は自然数）

にして考えてみよう．数列になおすのは，a の実数乗よりも a の自然数乗のほうがわかりやすく，議論もすすめやすいからである．さて，かりに

$$\lim_{n\to\infty}a^n=0\ \ (0<a<1)\ \cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

がいえたとすると，$n\leqq x<n+1$ をみたす x について

$$a^{n+1}<a^x\leqq a^n$$

であり，$\lim\limits_{n\to\infty}a^{n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}a^n=0$ であるから，はさみうちの原理によって，$\lim\limits_{x\to\infty}a^x=0$（$0<a<1$）がいえる．

このように，関数の極限 $x\to\infty$ は，はさみうちの原理によって，より簡単な数列の極限 $n\to\infty$ に帰着させて議論するのが定石である．

そこで，①を示せばよいことになったが，

[**①の証明**]　$0<a<1$ のとき，適当な正数 h をもちいて，$a=\dfrac{1}{1+h}$ とおくことができる．（このおきかえをするのは，つぎに示すように‘2項定理’を使うためである．）2項定理により，

$$(1+h)^n=1+{}_n\mathrm{C}_1h+{}_n\mathrm{C}_2h^2+\cdots+{}_n\mathrm{C}_nh^n$$

$$\therefore\ 0\leqq a^n=\frac{1}{(1+h)^n}\leqq\frac{1}{1+nh}$$

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{1+nh}=0$ であるから，はさみうちの原理により

$$\lim_{n\to\infty}a^n=0\ \ (0<a<1)$$

*　　　　　　*

上の証明を振りかえると，

指数関数 a^x → **指数関数の数列** a^n
→ **1次関数の数列** $1+nh$

と‘単純化’をしている．この単純化ができるのも，はさみうちの原理があればこそである．なお，

指数関数を整関数になおす道具が2項定理

であって（途中でちょんぎるという乱暴ななおしかたではあるが），この意味で2項定理は重要である．

●実戦編1

不等式

原則編では積分に関する不等式は省略したので，とくに12番以降の問題を演習してほしい

演習(1)●

原則編では，項目を細分して，その場所に適した問題したがって，テーマが明確でしかも単一である問題を重点的に演習してきた．

しかし，とくに 数Ⅲ の入試問題は，極限・微分・積分の全体にテーマが分散されたものや，テーマが単一であっても，それがなにであるかを見ぬくことに難しさのあるものが主流である．

実戦編では，できる限りヒントや先入観を与えないでこの主流問題を演習してもらうことにしよう．そして，微積分の総合力・実戦力を鍛えると同時に，原則編で述べたことの再確認をしてもらうことにする．

ヒントや先入観なしに，とはいえ，問題をランダムにならべるのもつまらないので，‘不等式’というようにおおまかなタイトルはつけていくことにする．

*　　　　　　*

微積分を支えるものは，不等式の運用にある，といえるくらい，微積分は‘不等式的世界’である．この事実は，原則編の極限などを通して，すでに納得しておられるだろう．

不等式と，極限・微分とのつながりは，原則編でかなり述べたので，ここでは，不等式と積分との関連で重要な定理を1つ述べておくことにしよう．

$f(x)\leqq g(x)$ ならば $f'(x)\leqq g'(x)$ であるとはいえないが，積分については，

［定理］ $a<x<b$ で $f(x)<g(x)$ ならば，

$$\int_a^b f(x)dx<\int_a^b g(x)dx$$

これは，積分の具体的定義によりほぼあきらかであるが，微分法→関数の変化→不等式，によって示すと，

証明． $F(t)=\int_a^t g(x)dx-\int_a^t f(x)dx$ と置くと，

$$F'(t)=g(t)-f(t)>0\ (a<t<b)$$

よって，$F(a)=0$ とから，$a<t\leqq b$ において，

$F(t)>0$ である．(☞ p. 13，定理1)

したがって，$F(b)>0$ (証明おわり)

問　題

1. 2つの数 $(0.99)^{99}$ と $(1.01)^{-101}$ との大小を比較せよ．（名大）

2. すべての実数xについて，$\cos(\sin x)\geqq 1-\dfrac{1}{2}x^2$ が成り立つことを示し，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\cos\left(\sin\frac{1}{k}\right)$ を求めよ．（芝浦工大）

3. (1) $0\leqq x_1<x_2<x_3\leqq\pi$ のとき

$$\frac{\sin x_2-\sin x_1}{x_2-x_1}>\frac{\sin x_3-\sin x_2}{x_3-x_2}$$ を証明せよ．

(2) $\lambda+\mu=1$，$0<\lambda<1$，$0\leqq x<y\leqq\pi$ である任意の λ，μ，x，y に対して，つねに

$$\sin(\lambda x+\mu y)>\lambda\sin x+\mu\sin y$$

が成立することを証明せよ．（横浜市大）

4. 関数 $f(x)$ が $0<t<1$ に対して，

$$tf(x)+(1-t)f(y)\geqq f(tx+(1-t)y)$$

を満たすとき，つぎの不等式を証明せよ．

$$\frac{f(x_1)+\cdots+f(x_n)}{n}\geqq f\left(\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}\right)$$

これを使って，aを正の定数とするとき，

$$\frac{a^{x_1}+\cdots+a^{x_n}}{n}\geqq a^{\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}}$$

が成り立つことを示せ．（武蔵工大）

5. $a>b>0$，$p>q>0$ のとき，

$\left(\dfrac{a^p+b^p}{2}\right)^{\frac{1}{p}}>\left(\dfrac{a^q+b^q}{2}\right)^{\frac{1}{q}}$ であることを示せ．

6. すべての自然数nに対して，

$$\sqrt{n^2+1}-1<\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{2}{\sqrt{5}}+\cdots+\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$$

が成り立つことを示せ．（山口大）

7. $0\leqq x\leqq 1$ で，不等式　$1-kx\leqq\dfrac{2}{1+e^x}\leqq 1-lx$

がつねに成り立つようなkの最小値およびlの最大値を求めよ．（千葉大）

○ 問題の解答

1. 数値から文字式をイメージできる感覚が必要で，入試としては最上級の難問といってよいだろう．

解 $(0.99)^{99}\cdot(1.01)^{101}$ ($=a$ とおく) と 1 との大小を比較すればよいが，

$$f(x)=(1-x)^{99}(1+x)^{101}\quad(a=f(0.01))$$

とおくと，

$$\begin{aligned} f'(x)&=-99(1-x)^{98}(1+x)^{101}\\ &\qquad+101(1-x)^{99}(1+x)^{100}\\ &=(1-x)^{98}(1+x)^{100}\{-99(1+x)+101(1-x)\}\\ &=(1-x)^{98}(1+x)^{100}\cdot 200(0.01-x) \end{aligned}$$

よって，$0<x<0.01$ では，$f'(x)>0$ であるから，

$$a=f(0.01)>f(0)=1$$

したがって，　$\boldsymbol{(0.99)^{99}>(1.01)^{-101}}$

■研究　e の定義式にでてくる $a_n=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ が増加数列であるという事実（☞ p.113）を使えば，

$$(0.99)^{-99}=a_{99},\quad (1.01)^{101}=1.01a_{100}$$

によって，結論をだすこともできる．

2. 前半が考えにくい難問である．$x>0$ で $\sin x<x$ であること，また，$x\neq 0$ ならば $\sin^2 x<x^2$ であることは常識としておきたい．（微分法で証明できるが，グラフによりあきらかであろう．）

解 任意の x について，$\sin^2 x\leqq x^2$ が成り立つから，

$$\begin{aligned} \cos(\sin x)&=1-2\sin^2\frac{\sin x}{2}\\ &\geqq 1-2\left(\frac{\sin x}{2}\right)^2=1-\frac{\sin^2 x}{2}\geqq 1-\frac{x^2}{2} \end{aligned}$$

つぎに，$S_n=\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\cos\left(\sin\frac{1}{k}\right)$ とおくと，

$$S_n\leqq\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}1=1$$

$$\begin{aligned} S_n&\geqq\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(1-\frac{1}{2k^2}\right)=1-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k^2}\\ &\geqq 1-\frac{1}{n}\left(\frac{1}{2}+\int_1^n\frac{1}{2x^2}dx\right)=\cdots=1-\frac{1}{n}\left(1-\frac{1}{2n}\right) \end{aligned}$$

［第 1 の≧は前半の不等式による．第 2 の≧は p.62 の例題 5 の解答と同様に，面積の比較による．］

よって，はさみうちの原理により，

$$\lim_{n\to\infty}S_n=1$$

➡注　n が大きいとき，n 個の $\cos\left(\sin\dfrac{1}{k}\right)$ の大多数が $\cos(\sin(0\text{ に近い}))\fallingdotseq\cos 0=1$ であるから，それらの平均である S_n は 1 に収束するであろうことは，直感的に予想されることである．

3. (1)は平均値の定理によりすぐに証明できるので，解答は省略する．(2)で(1)をどう活用するかが問題．

解 (2) (1)の不等式を変形すると，

$$\sin x_2>\frac{x_3-x_2}{x_3-x_1}\sin x_1+\frac{x_2-x_1}{x_3-x_1}\sin x_3$$

$\lambda+\mu=1,\ 0<\lambda<1,\ 0\leqq x<y\leqq\pi$ ならば

$$\lambda x+\mu y>\lambda x+\mu x=x,\quad \lambda x+\mu y<\lambda y+\mu y=y$$

であるから，(1)において $x_1=x,\ x_3=y,\ x_2=\lambda x+\mu y$ とおくことができて，このとき，

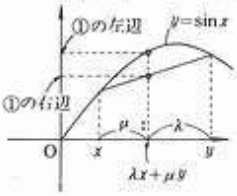
$$\frac{x_3-x_2}{x_3-x_1}=\frac{(1-\mu)y-\lambda x}{y-x}=\lambda$$

$$\frac{x_2-x_1}{x_3-x_1}=\frac{(\lambda-1)x+\mu y}{y-x}=\mu$$

であるから，$\sin(\lambda x+\mu y)>\lambda\sin x+\mu\sin y$ ………①

■研究　①の不等式をグラフで視覚化すれば，右図のようになる．一般に $y=f(x)$ のグラフが上に凸ならば，

$$f(\lambda x+\mu y)>\lambda f(x)+\mu f(y)$$



が成り立つことは，この視覚論法によりあきらかである．

本問の(1)の不等式はじつは，$y=\sin x$ $(0\leqq x\leqq\pi)$ のグラフが上に凸であることと同値である．

4. 前問とは逆に，$y=f(x)$ が下に凸であるという条件が与えられている．最終的に証明すべき不等式は，$a^{x_i}=X_i$ とおくと，

$$\boldsymbol{\frac{X_1+\cdots+X_n}{n}\geqq\sqrt[n]{X_1\cdot\cdots\cdot X_n}}$$

であり，本問は，**相加平均≧相乗平均** の一証明方法を問題にしているわけである．

解 ［前半の略解］

$t=\dfrac{1}{2}$ とすることにより，$n=2$ のときの成立を示すことができる．$n=k$ のときの成立を仮定すれば，

$t=\dfrac{k}{k+1}$，$x=\displaystyle\sum_{i=1}^{k}\frac{x_i}{k}$，$y=x_{k+1}$ とすることにより，$n=k+1$ のときの成立を示すことができる．

［後半の略解］ $f(x)=a^x$ が $0<t<1$ に対して，

$$tf(x)+(1-t)f(y)-f(tx+(1-t)y)\geqq 0$$

をみたすことを示せばよいが，この式の左辺を $F(x)$ とおくと，$F'(x)=t(a^x-a^{tx+(1-t)y})\log a$

$a>1,\ a<1$ のどちらの場合も，$x=tx+(1-t)y$ すなわち $x=y$ のとき極小かつ最小となり，$F(y)=0$ であるから，$F(x)\geqq 0$ である．$a=1$ のときは自明．