算数

……合格への チャレンジ演習……

目次

この本の使い方

中井淳三

♠ この本の特色

この本は，

　数，平面図形，立体図形，文章題

の４つの章からなっていて，さらに各章がそれぞれ，

数…………整数(18)，規則性(19)，
　　　場合の数(20)，論理(16)
平面図形…角度・長さ・面積(14)，
　　　長さの比や面積の比(20)
立体図形…立体の見方(12)，体積・表面積
　　　(10)，影(かげ)や水(13)，立体の切断(15)
文章題……和と差(9)，割合と比(14)，
　　　速さ(20)

に分かれています（かっこの中の数字は問題数です）.

全部で200題ありますが，これらのほとんどは03年～07年度に『中学への算数』の『発展演習』で取り上げたものです.『中学への算数』では，演習で取り上げる問題の難易度を，

A：１人で解いてもらいたい問題
B：家族の方や先生に相談してもよい問題
C：自力で解くのは困難な挑戦(ちょうせん)用の問題

の３段階に分けていますが，発展演習であつかう問題はほとんどがＣランクです．つまり，この本の問題もほとんどがＣランクだということです.

また，それぞれの問題に対してベストと思われる解答解説をつけました．さらに，別解がある場合は，できるだけ紹介(しょうかい)するようにしました.

おもしろさは，☆の数（1個から5個まで）で表し，多いほどおもしろいことを表します.

♥ この本の使い方

算数の実力を高めるには，難しめの問題を，自分の力で解くことが大切です．わずかずつでも自力で解く努力を続けると，いつのまにか，大きな力が身についていきます．同時に，考える習慣や最後まであきらめずにねばるがんばりも体得できます．問題の良さも自分で発見できるようになるでしょう.

さて，上で述べたように，この本の問題のほとんどが，自力で解くのは困難なものです．しかし，最初から解答解説を読むのでは，この本に取り組む意味がありません．自分の力で解けるところまで解いてみることから始めてください．どうしても解けないときに初めて解答解説を読むようにしましょう．次のようなステップで取り組むのも一つの方法です.

問題文の意味をしっかりと理解することから始める．そのために，与えられた条件やポイントになると思うことをノートにメモする（図形の問題などでは，自分であらためて図をかくようにしましょう）.

このメモや図をもとに，解決への糸口となるものは何かを考える.

糸口が見つからないときは，問題文の右横にあるコメントや，解答の前書きを参考にしてさらに深く考えてみる.

どうしても解けないときには，解答解説を読み，数日後にもう一度チャレンジする.

また，それほど苦労しなくて解けたときも，単に答え合わせをするだけでなく，解答解説をしっかりと読んで，より適切な解き方を身につけるようにしてください.

この本を自力で解けるようになれば，どんな難関中学の入試問題にも，自信を持って立ち向かうことができるでしょう．この本を利用されたみなさんが，志望校に合格されることを願っています.

第1章

数

整　数

規則性

場合の数

論　理

I　整数 >>>

（解答解説は，p.45～56）

1　6けたの整数2□6□1□は，27と37の公倍数です．このとき，万の位の数字は□，100の位の数字は□，一の位の数字は□です．（05　大阪星光学院）

面白さ　☆☆☆☆
一発勝負，という感じです．結局どんな数の倍数なのしょう？

2　2以上の整数のうちで，約数が1とその数自身だけであるものを素数といいます（例えば，2，3，5，7，11，13などが素数です）．いま，2以上の整数xについて，xの約数のうち素数であるものを1種類ずつかけ合わせた値(あたい)を［x］で表すことにします．例えば，540(＝2×2×3×3×3×5)の約数のうち素数であるものは2，3，5ですから，［540］＝2×3×5＝30となります（ただし，xが素数の場合は，約数になる素数は1つだけですから，［7］＝7のようにその数自身とします）．ここで，次の2つのことがらを考えます．

①　x，yはどちらも10から99までの2桁(けた)の整数である．

②　［$x \times y$］と［x］×［y］の値が同じになる（x，yに共通な約数は1以外にはない）．

さらに，$x \times y$＝［$x \times y$］×Aとおきます．ただし，Aはx，yによって決まる整数です．

（1）　A＝45のとき，①と②が両方とも成り立つx，yの値の組をすべて求めなさい．ただし，xはyより小さい数とします．

（2）　①と②が両方とも成り立つx，yの値の組が1つでも求められるのは，Aがどのような値のときまでですか．その一番大きなAの値を求めなさい．（06　暁星）

面白さ　☆☆☆☆
具体例でいろいろためしてみましょう．

3　記号《A》は，整数Aの約数の個数を表しています．たとえば，《1》＝1，《2》＝2，《4》＝3となります．次の問いに答えなさい．

（1）　《168》はいくつですか．

（2）　20以下の整数で，《A》＝2となる数Aは何個ありますか．

（3）　A，B，Cはどれも20以下の整数で，BはAより大きく，CはBより大きい数であるとします．このとき，下の式をみたすような3つの数A，B，Cの組は何組ありますか．

《A》×《B》×《C》＝24

（04　サレジオ学院・B）

面白さ　☆☆☆
（3）では，20以下の整数の約数の個数を調べておくとよいでしょう．

4 5つの整数A，B，C，D，Eは，それぞれ1から100までの異なる整数です．この5つの整数について，次のⓐからⓞのことがわかっています．

面白さ　☆☆☆☆
余りのたし算，かけ算の工夫(くふう)ができるかどうかがカギです．

ⓐ　この5つの整数を小さい順に並べるとA，B，C，D，Eです．
ⓘ　Dを6で割った余り，Eを6で割った余り，DとEの和を6で割った余りはみな等しいです．
ⓤ　AとBの積を6で割った余りは3，AとCの積を6で割った余りは1，BとCの和を6で割った余りは2です．
ⓔ　Aを6で割った商とEを6で割った商との積は120です．
ⓞ　BとEの差とDとEの差の比は7：6です．

次の問いに答えなさい．

（1）　A，B，C，D，Eを6で割った余りをそれぞれ求めなさい．割り切れる場合の余りは0とします．
（2）　A，Eをそれぞれ求めなさい．
（3）　B，C，Dをそれぞれ求めなさい．　（03　フェリス女学院）

5 整数AをAのそれぞれの位の数の和で割り，余りを〔A〕で表すことにします．たとえば，〔123〕については，

面白さ　☆☆☆☆
当然，余りと割る数の大きさの関係に着目します．（3）まで何とか答えを見つけだしてください．

123を1+2+3の6で割ると余りは3なので，〔123〕=3

となります．また，

〔7〕は，7を7で割ると割り切れるので，〔7〕=0
〔〔98〕〕は，〔98〕=13なので，〔〔98〕〕=〔13〕=1

となります．

（1）　〔58〕，〔〔862〕〕をそれぞれ求めなさい．
（2）　Aが2けたの整数のとき，〔A〕が最も大きくなるようなAを求めなさい．
（3）　〔〔A〕〕=9となる整数Aのうち，最も小さいものを求めなさい．　（04　桐朋）

6 2，3，5の3つの数字だけを使ってできるすべての4けたの数を次のように小さい順に並べました．

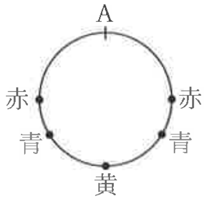
面白さ　☆☆☆☆
（4）では，2で割り切れる回数と5で割り切れる回数とを比べます．

2222，2223，2225，2232，……………，5553，5555

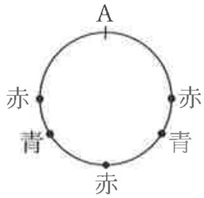
（1）　全部でいくつ並んでいますか．
（2）　50番目の数は何ですか．
（3）　8の倍数はいくつありますか．
（4）　並んでいる数をすべてかけあわせると，0は一の位から続けていくつ並びますか．　（06　洛南高附）

7 円周上のＡをスタートして，1周目は円周を2等分する点に黄色のシールを貼ります．2周目は円周を3等分する点に青色のシールを貼ります．3周目は円周を4等分する点に赤色のシールを貼ります．このようにして，一周ずつ，それまでとはちがう色のシールを貼っていきます．ただし，Ａには貼りません．シールは（1），（2）の2通りの方法で貼ります．図は3周目が終わったときです．

（1）　すでにシールの貼ってある点には，新しいシールは貼らないことにします．5周目が終わったとき，シールの貼ってある点は全部で何個ですか．また，23周目にシールを貼る点は何個ですか．



（2）　すでにシールが貼ってある点にも，新しいシールを上から重ねて貼ることにします．15周目が終わったとき，一番上に見えるシールの色は何種類ですか．また，このときシールが2枚以上重ねて貼ってある点は全部で何個ですか．



（05　雙葉）

面白さ　☆☆☆☆
シールは「〇分数」を表すので，書き出しても答えがわかりますが….

8 $\boxed{1}$から$\boxed{50}$までのカードが50枚あり，それぞれ表は黒，裏は赤で同じ数字が書いてあります．始めはすべて黒い数字の方を上にしておき，ある数字を言うたびにその数字の倍数が書いてあるカードだけ裏返すことにします．

（1）「2」,「7」と言った後で，赤い数字が上になっているカードは何枚ありますか．

（2）　1けたの異なる数字を5個言った後で$\boxed{12}$，$\boxed{18}$は黒，$\boxed{24}$，$\boxed{36}$は赤い数字が上になっていました．5個の数字の組み合わせは何通りも考えられますが，5個の数字の和の中で，最も小さい数と最も大きい数はいくつですか．

（03　東洋英和女学院・B）

面白さ　☆☆☆☆
（2）　$\boxed{12}$と$\boxed{24}$，$\boxed{18}$と$\boxed{36}$がそれぞれ異なる色になるための条件を考えましょう．

I　整数

1　9の倍数の見分け方は，よく知っているでしょう．それの応用です．

［解説］　この6けたの整数を，$A=2a6b1c$ とします．

27と37は互いに素（最大公約数が1）なので，A は 27×37 の倍数です．つまり，999の倍数です．

ここで，A を3けたずつに区切ると，

$$A=2a6\times1000+b1c$$
$$=2a6\times(999+1)+b1c$$
$$=2a6\times999+2a6+b1c$$

となります．

～～部は，999の倍数なので，残りの

$2a6+b1c$

が，999の倍数であればよいことがわかります．

よって，右のような覆面算だと考えて，答えは，

$$\begin{array}{r} 2\ a\ 6 \\ +\ b\ 1\ c \\ \hline 9\ 9\ 9 \end{array}$$

$\boldsymbol{a}=9-1=\mathbf{8}$，$\boldsymbol{b}=9-2=\mathbf{7}$，$\boldsymbol{c}=9-6=\mathbf{3}$

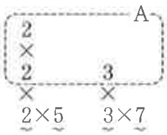
2　たとえば，$x=40$，$y=63$ のとき，$40=2\times2\times2\times5$，$63=3\times3\times7$ より，

$[x\times y]=[x]\times[y]=(2\times5)\times(3\times7)$，

$\mathrm{A}=(2\times2)\times3$

となります．

つまり，Aは，x と y を素因数分解したとき，2個以上ある素因数の，2個目以降をすべてかけたものです．



［解説］　（1）　$45=3\times3\times5$ です．

もし，素因数3，5がともに x，y の一方のみにふくまれているとすると，その数は最も小さくても，

$3\times3\times3\times5\times5=675$

となり，99を超えてしまいます．

よって，素因数は3は x，y の一方に，素因数5は他方にふくまれています．

このとき，x，y の一方は，$3\times3\times3=27$ の倍数，他方は，$5\times5=25$ の倍数です．

2桁の整数 x，y は，3，5以外に，他方にはない素因数を持っていてもよいので，$x<y$ に注意すると，x，y の組は，

(25，27)，$(27, 25\times2)=$**(27，50)**

$(25, 27\times2)=$**(25，54)**

（2）　Aの値が最も大きくなるのは，x，y がそれぞれ素因数を1種類しか持たないときです．このような2桁の数で，99に最も近いものをさがすと，

$2\times2\times2\times2\times2\times2=2\times32=64$，

$3\times3\times3\times3=3\times27=81$，

$5\times5=25$，　$7\times7=49$

となるから，答えは，$x=64$，$y=81$ のときで，このとき，$\mathrm{A}=32\times27=$**864**

3　素因数分解を利用して，約数の個数を求めましょう．

［解説］　（1）　168を素因数分解すると，

$168=2\times2\times2\times3\times7$

2の使い方は0個～3個で4通り，3，7の使い方は2通りずつなので，答えは，

$4\times2\times2=$**16**

（2）　約数が2つだけの整数は素数です．20以下の素数を書き出すと，

2，3，5，7，11，13，17，19

なので，答えは，**8個**です．

（3） 1〜20の整数について，約数の個数を表にまとめておきます．

数	1	2	3	4	5	6	7	8
約数の個数	1	2	2	3	2	4	2	4

9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
3	4	2	6	2	4	4	5	2	6	2	6

ここに出てくる約数の個数は1〜6なので，それら3つの積が24になる組み合わせとしては，次の㋐〜㋒があります．

㋐ $1\times4\times6$ ㋑ $2\times2\times6$ ㋒ $2\times3\times4$

まず，㋐の場合．

約数1個は1通り，4個は5通り，6個は3通りなので，組み合わせとしては，

$1\times5\times3=15$(通り)

あります．それぞれの組み合わせで，数の小さい順に並べればよい(例えば1と15と12ならば，1−12−15の順)ので，この場合，15組できます．

㋑の場合．

約数2個の数が8つあり，この中から2つを選びます．残りは，約数6個の数，3つの中から選びます．8つから2つを選ぶ選び方は，$8\times7\div2=28$(通り)

なので，$28\times3=84$(組)

㋒の場合．

約数2個は8通り，3個は2通り，4個は5通りなので，$8\times2\times5=80$(組)

以上から，答えは，

$15+84+80=$**179(組)**

4 6で割った余りどうしについての，和と積がどうなるかを，表などにまとめてから始めましょう．

[解説] **（1）** 整数を6で割った余りで6つのグループに分類すると，和や積もこの6つのグループのどれかにふくまれます．

そして，その和や積がふくまれるグループは，余りどうしの和や積がふくまれるグループと同じになります．

そこでまずは，和，積それぞれについて，どのグループにふくまれるかを表にまとめると，右のようになります．

（和の表）

	0	1	2	3	4	5
0	0	1	2	3	4	5
1	1	2	3	4	5	0
2	2	3	4	5	0	1
3	3	4	5	0	1	2
4	4	5	0	1	2	3
5	5	0	1	2	3	4

（積の表）

	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5
2	0	2	4	0	2	4
3	0	3	0	3	0	3
4	0	4	2	0	4	2
5	0	5	4	3	2	1

㋑からDとEは同じグループの数で，その和も，もとと同じグループの数です．

同じグループどうしの和が，もとと同じグループになるのは，余りが0の場合だけです．よって，DとEの余りは0であることがわかります．

㋒から，A×Bは「余り3」のグループ，A×Cは「余り1」のグループなので，積の表から，Aは「余り1」か「余り5」のグループのどちらかです．

Aが「余り1」のグループのとき，Bは「余り3」のグループ，Cは「余り1」のグループですが，このとき，BとCの和は，「余り4」のグループとなり，条件に合いません．Aが「余り5」のグループのとき，Bは「余り3」のグループ，Cは「余り5」のグループとなり，BとCの和は「余り2」のグループで，条件に合います．

以上から，答えは，

A…5，B…3，C…5，D…0，E…0

（2） Aを6で割った商をF，Eを6で割

った商をGとすると，F<Gで，㊁から，

$F\times G=120$

です．一方，$100\div 6=16$ 余り 4

より，F，Gはどちらも16以下です．16以下の2つの整数の積が120になるのは，

$120=8\times 15=10\times 12$

より，$(F,\ G)=(8,\ 15)$，$(10,\ 12)$ の2組があります．

(8，15)のとき．

㋐　$A=6\times 8+5=53$，$E=6\times 15=90$

(10，12)のとき．

㋑　$A=6\times 10+5=65$，$E=6\times 12=72$

となります．

㋑のとき，(1)から，D=66と決まるので，B，Cをとることができません．

よって㋐の場合が適して，答えは，

A=53，E=90

(**3**)　Bを6で割った余りは3なので，Bは3の倍数です．E=90も3の倍数なので，BとEの差は3の倍数でもあります．よって，㋔と合わせて，BとEの差は21の倍数です．

すると，(2)のとき，BとEの差は21しかありえません．

よって，**B**$=90-21=$**69**

すると，**D**$=90-21\times\frac{6}{7}=$**72**

最後に，69と72の間で，6で割った余りが5になるものをさがして，**C=71** が答えです．

5　(2)　2けたの整数の各位の数の和が大きい順に調べましょう．

［**解説**］　(**1**)　$58\div(5+8)=4$ 余り 6

より，〔58〕=**6**

$862\div(8+6+2)=53$ 余り 14

より，〔862〕=14

$14\div(1+4)=2$ 余り 4

より，〔〔**862**〕〕=〔14〕=**4**

(**2**)　2けたの整数の各位の数の和が大きい順に調べます．

• 各位の和が18（99の9+9）のとき．
  このときの余りの最大は17ですが，
  $99\div 18=5$ 余り 9
  なので，余り17は不可能です．
• 各位の和が17（98か89）のとき．
  余りの最大は16．
  $98\div 17=5$ 余り 13，$89\div 17=5$ 余り 4
  なので，これも不可能です．
• 各位の和が16（97か88か79）のとき．
  余りの最大は15．
  $97\div 16=6$ 余り 1，$88\div 16=5$ 余り 8，
  $79\div 16=4$ 余り 15
  以上より，答えは，**79**です．

(**3**)　〔A〕=Bとすると，〔B〕=9

これをみたす最小のBを求めます．

Bの各位の和が10(19，28，…，82，91)のときを調べることで，B=19が最小です(☞注)．

このとき，〔A〕=19

ここから，Aの最小の数を求めます．

各位の和が20のとき（少なくとも3けたの数）を調べると，$299\div 20=14$ 余り 19 より，**299**が最小です．

➡**注**　Bの各位の和が11以上だと，Bは29以上で最小ではありません．さらに〔A〕(=B)が29以上なので，Aの各位の和は30以上．すると，Aは4けた以上となり，明らかにAも最小ではありません．同様(どうよう)に〔A〕=19についても，各位の和が20の場合を調べれば十分です．

6 （４）は，10 で何回割り切れるかということ．そして，10＝2×5 です．

［**解説**］（**1**） 4つの桁それぞれに，2，3，5 の 3 通りの数が考えられるので，答えは，

3×3×3×3＝**81(個)**

（**2**） 千の位が 2 または 3 である数は，全部で，2×3×3×3＝54(個) あるので，50 番目の数は，千の位が 3 である数のうち，大きい方から 5 番目です．答えは，3555，3553，3552，3535 の前で，**3533.**

（**3**） 1000÷8＝125 より，8 の倍数の下 3 桁は 8 で割り切れます．

2，3，5 を用いてできる 3 桁の 8 の倍数は，232，352，552 の 3 個．千の位の決め方を考えれば，答えは，3×3＝**9(個)**

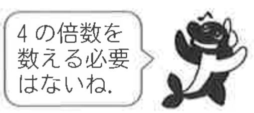
（**4**） 並んでいる数のうち，5 の倍数（一の位が 5）は，3×3×3×1＝27(個)

25(＝5×5) の倍数（下 2 桁が 25）は，3×3×1＝9(個)

125(＝5×5×5) の倍数はないので，並んでいる数の積（P とします）は，5 で (27＋9＝)36 回割り切れます．

一方，並んでいる数のうち，2 の倍数（一の位が 2）は，3×3×3×1＝27(個)

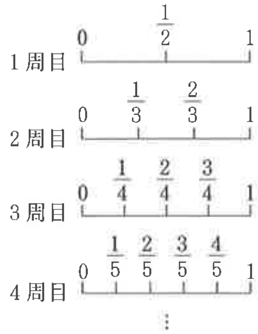
8(＝2×2×2) の倍数は，（３）より 9 個あるので，P は，2 で (27＋9×2＝)45 回以上割り切れます．



よって，P は，10(＝2×5) で 36 回割り切れるので，答えは，**36 個.**

7 円周ではなく，A で切って数直線にして考えましょう．

［**解説**］ 円周を A で切って，まっすぐにのばします．すると，右上のように 0 から 1 までの数直線と見ることができ，シールを貼る位置に真分数が対応します．



（**1**） このとき，約分できない分数に対しては，新たにシールを貼ることになり，約分できる分数に対しては，すでにその位置にシールが貼られています．

5 周目が終わったとき，シールが貼ってある点の数は，分母が 2～6 の真分数のうち約分できないものの個数です．

よって，

$$\frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{2}{3},\ \frac{1}{4},\ \frac{3}{4},\ \frac{1}{5},\ \frac{2}{5},\ \frac{3}{5},$$

$$\frac{4}{5},\ \frac{1}{6},\ \frac{5}{6}\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(*)$$

の **11 個**です．

23 周目にシールを貼る点の数は，分母が 24 の真分数のうち，約分できないものの個数です．すると，

$$\frac{1}{24},\ \frac{5}{24},\ \frac{7}{24},\ \frac{11}{24},\ \frac{13}{24},\ \frac{17}{24},\ \frac{19}{24},\ \frac{23}{24}$$

の **8 個**です．

（**2**） 分母が 16 までの範囲で真分数を考えることになります．

この中で，分母が 2～8 の真分数に対しては，分母と分子をどちらも 2 倍してできる（値の等しい）分数が，いま考えている範囲内にあります．

つまり，1 周目～7 周目のシールは，どれも上から別のシールを貼られることになり，見えなくなります．

一方，分母が 9～16 の分数のうち，約分できない分数を考えてみます(9～16 のどの分母に対しても，こういう真分数があります)．

あとがき

本誌『中数』の「発展演習」に採る問題を選ぶとき，問題文を読んだ限りでは，最後までは解く方針が立たないものを，まず集めます．そののち，それら1題1題をしっかりと考えます．考え込んでしまうこともしばしばで，中には本当に難しく，解決までに数時間かかるような問題もあります．

その過程で，試行錯誤をすることに大きな意味があった問題，まるで異なる複数の切り口から攻め込むことが可能であった問題など，一言でいえば，時間がたつのを忘れて没頭することができた問題を採用しています．

みなさんも，解けたか解けなかったかではなく，考えた過程をじっくりとかみしめながら，この本の200題に向き合ってください．

（堀西）

毎年毎年たくさんの入試問題が作られます．そのうちの多くは学習した知識を問う問題，すなわち受験のパターン問題です．試験には時間の制限があるので，これは当然のことでしょう．と同時に，一読しただけでは方針が定まらず，あれこれ悩んでしまう問題に出会うこともよくあります．もちろん，レベルの差はあり，本番で考え切って答えを出すべきものから，捨てるのが賢明というものまでいろいろです．でも，その一つ一つが力作で，「算数の範囲に限っても，こんなことまで考えられるんだ」ということを教えてくれる面白い問題です．

それらの力作を，この本では集めました．算数が大好きな小学生のみなさん，基本が身についたら，この中の何題でもいいから取り組んでください．すばらしい出会いが待っています．

（下平）

月刊誌『中学への算数』の「発展演習」で5年間に取り上げた問題は約300題です．これと，5年間の「今年の入試／この1題」や「わくわく算数100題」などの約700題，合わせて約1000題の中から，特に面白くて難しい問題を選ぶと，ちょうど200題になりました．問題数は少な目かもしれませんが，解きごたえは十分以上にあると思います．ぜひ，頭を極限まで使って問題を解く楽しみを味わってください．

また，東京出版では，読者のみなさんとの相互交流が最も重要だと考えています．本書を読まれて，質問・別解などがありましたら，編集部あてにお便りをお送りください．他の読者の方とも一緒に考えたいようなものについては，毎月の「中学への算数」で取り上げたいと思っています．

（中井）

算数　合格へのチャレンジ演習

平成21年2月5日　第1刷発行
平成27年5月30日　第4刷発行

編　者　東京出版編集部
発行人　黒木美左雄
整版所　錦美堂整版
印刷所　光陽メディア
発行所　**東京出版**
〒150-0012
東京都渋谷区広尾3-12-7
電　話　(03) 3407-3387
振　替　00160-7-5286
http://www.tokyo-s.jp/

ISBN978-4-88742-150-9
（定価はカバーに表示）