はじめに

今から 20 数年前，まだ私が高校 3 年だったとき，受験の終わった先輩から使い古した東京出版の「大学への数学」を数冊もらったのが，この出版社とのはじめての出会いでした．もともと数学は嫌いな方じゃなかったのですが，成績が格段良いというわけでもなく，ちょっとやれば多少は成績が上がるかもしれない…程度に思って記事を読み，演習問題を解いていくうちに，「数学って面白いなあ」と思えるようになっていきました…．

その後，浪人時代を経て大学生になり，東京出版で答案添削のアルバイトを始めると，問題を解いてまあまあ楽しいといった程度の数学好きの私は，問題の背景にある更に高度な内容に触れたり，全国から寄せられた答案のなかから今まで思いもつかなかったアイデアを教えてもらったりして，また新たに数学に魅力を感じていきました…．

そして縁あってある学習塾で働くことになり，そこで中学生を相手に数学を教えるようになりました．正直言って中学の数学なんて簡単だと思っていた私は，すぐそんな考えが愚かだったことを思い知らされます．そこでは簡単，当たり前と思われていたことにも，「それはなんで？」と疑問にもち，独自にカリキュラムを構成し，中学の内容だけでももっと深く，もっと面白く，もっと先を見せることが出来ることをめざしていて，それに向けて日々さまざまな議論がなされていました．私はここで数学がますます好きになっていきました…．

そんななか，奇跡的に問題集発行の話が舞い込んできて，この 1 冊ができあがりました．私が感じた「数学って，とっても素敵なもの！」という思いを何とかここに込めようとしたつもりです．幾何の問題集としては，「証明」の部分にこだわったものになっていて，ついつい相当難しいものまで扱うことになってしまいましたが，2000 年以上の歴史を持つ初等幾何の魅力をちょっとでも感じて，ちょっとでもみなさんの勉強の助けになれば幸いです．

2006 年 2 月　おがわ いさお

本書の特色

基本例題：各章で使用する定理の確認と，それらの基本的な使い方をまとめています．また，後半は応用問題的な多少難しめの問題も入れてあります．学習内容がはじめての方は，証明の書き方や問題の考え方を勉強するのに使うといいかと思います．また，学校などですでに勉強されている方でもその分野のまとめとして使えると思います．

発展例題：各章で 2〜3 問，典型的な難問を紹介しています．初めての方は読み飛ばして構いません．勉強されている方が読んで，考え方を身につけてほしい問題です．

演習問題：各章で 11〜12 問，前半は基本問題を，後半は応用問題をセレクトしてあります．はじめての方や苦手な方は基本例題などを参考にして前半の問題に挑戦してきちんと証明文が書けることをめざしてほしいと思います．勉強されている方は後半の問題中心にとりくんでいってもいいでしょう．また，各問ごとに目標時間を設定してありますが，これはアイデアが思いつくまでの時間で，あくまでめやすです．時間にゆとりのある方は目標時間は気にしないで，粘り強く考えていってください．

発展問題：各章で 4〜5 問，発展的な問題を取り上げています．標準的な問題ではものたりない方はぜひ挑戦してみてほしいと思います．これでは難しいという方には，誘導をつけて解きやすくしたバージョンもありますので利用してください．

解答について：出来る限り図を多くして，考え方の流れがわかりやすいように工夫しています．また，証明文は極力省略しないで載せています．図を見ながらじっくり証明文を読んで，どういう法則をどういう順番で使っているのかをしっかりつかんで理解を深めていってほしいと思います．

本書の使用方法

① 中学校に入学したばかりの方

中学校の勉強がはじめての方，未習分野を勉強される方は，まずは基本例題の解答を図と照らしあわせながら読みすすめて，法則の使い方や考え方の流れをつかんでいきましょう．そのあとに解答の図を見ながら自力で証明文を書く練習をしたり，演習問題にとりくんでみましょう．証明文を理解して書けるようになるには，文字式の扱いができないと難しいので，文字式の勉強がまだの方は，そちらを勉強してからとりくみましょう．

② 数学が好きでどんどん力をつけたい方

すでに学校などで勉強していて幾何には自信のある方は，演習問題や発展問題をたっぷり時間をかけて考えていくといいでしょう．どうしても解けなければ解答をよく読んでみて，しばらくしてからまた挑戦してみてください．

また，必ずしも第1章からはじめることはありません．ひととおり勉強したあとに分野を気にせず，いろいろな章の発展問題を攻略していくのも効果的なとりくみかたです．

③ 数学に苦手意識を持っている方

すでに勉強していてもなかなか証明が書けないという方は，まずは基本例題の考え方を図を見てつかむことを意識してみましょう．それから解答を見ながらで構わないので，証明文を自分でまねて書いてみましょう．その後に時間をおいて図を思い出しながら，極力解答を見ないで自力で証明を書いてみてください．慣れるまで時間がかかるかもしれませんが，証明を理解して書けるようになるには，難しい問題を背伸びしてやるより，基本的な問題をしっかりこなすことが大切です．

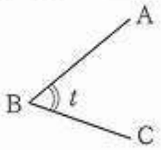
④ 学校の定期試験対策には...

該当分野の演習問題をこなしてみて，できなかった問題を解答を読んで復習してみましょう．時間が無ければ全問やる必要はありません．自分で問題をセレクトして，やれる範囲で一問一問にじゅうぶん時間をかけてとりくんでください．

目 次

第1章ででてくる公理・定理・用語など

角度の表記



左図のように3点A，B，Cで角tが与えられているとき，

$$t=\angle ABC$$

とかきます．（もちろん$\angle CBA$としてもかまいません）また，特に誤解のないときは，単に$\angle B$とかくこともあります．

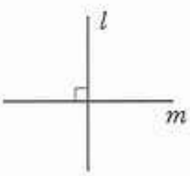
平行の表記

2直線l，mが交点を持たないとき，lとmは平行といい，

$$l \parallel m$$

とかきます．図では左のように矢印をかいてあらわしたりします．

垂直の表記

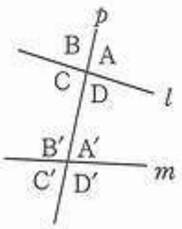


2直線l，mが直角で交わっているとき，lとmは垂直といい，

$$l \perp m$$

とかきます．図では左のように ⊥ をかいてあらわしたりします．

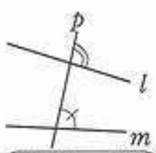
同位角・錯角・同側内角の位置



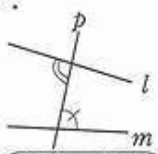
2直線l，mに直線pが交わり，左図のように角A～角D，角A′～角D′ができたとき，

- ○AとA′，BとB′，CとC′，DとD′を同位角の位置
- ○CとA′，DとB′を錯角の位置
- ○DとA′，CとB′を同側内角の位置

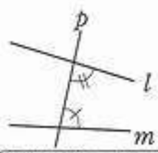
といいます．



同位角の位置

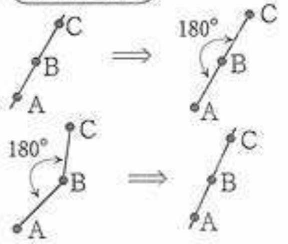


錯角の位置



同側内角の位置

平角公理

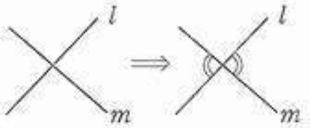


3点A，B，Cがあるとき，

（i）　A，B，Cがこの順に一直線上に並ぶならば，$\angle ABC=180^\circ$ です．

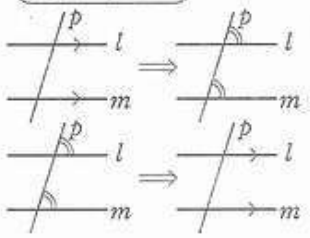
（ii）　$\angle ABC=180^\circ$ ならば，A，B，Cは一直線上にあります．

対頂角定理



2直線が交わっているならば，その対頂角は等しい．　（☞基本例題1-1参照）

同位角公理

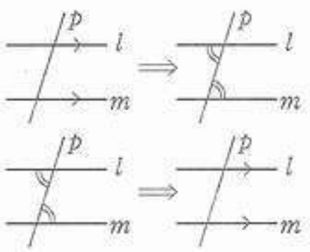


2直線 l，m に直線 p が交わっているとき，

（i）　$l \parallel m$ ならば，同位角の位置の2角は等しい．

（ii）　同位角の位置の2角が等しいならば，$l \parallel m$ です．

錯角定理



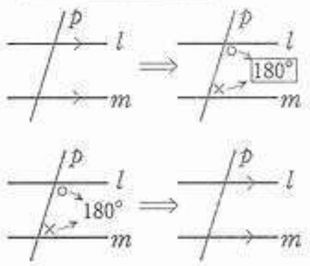
2直線 l，m に直線 p が交わっているとき，

（i）　$l \parallel m$ ならば，錯角の位置の2角は等しい．

（ii）　錯角の位置にある2角が等しいならば，$l \parallel m$ です．

（☞基本例題1-2参照）

同側内角定理



2直線 l，m に直線 p が交わっているとき，

（i）　$l \parallel m$ ならば，同側内角の位置の2角の和は180°です．

（ii）　同側内角の位置の2角の和が180°ならば，$l \parallel m$ です．

（☞基本例題1-3参照）

[数学の証明を勉強するときにでてくる用語の説明]

公理　考えている世界で，はじめから無条件で使っていいルールのことです．（平角公理，同位角公理など）

定理　考えている世界で，すでに使っていいルールから，新たに使っていいと確認されたルールのことです．（錯角定理など）

仮定　与えられた問題に，はじめからかいてある条件のことです．

結論　与えられた問題で，「証明しなさい」とか「示しなさい」などと求められていることです．

証明　その世界で使っていいルール（公理・定理）だけを使って，仮定からその問題でだされている結論を導く過程を，使ったルールや何から導いたのかの理由を明記して，記述することです．

P ならば Q（P ⇒ Q）

例えば

- 東京都足立区民だと絶対に東京都民です．
- 偶数だと絶対に整数です．
- 5 以上の数だと絶対に 2 以上の数です．

などのように，「P だと絶対に（1 つの例外もなく）Q になる」ことを，「P ならば Q」といい，「P ⇒ Q」とかきます．

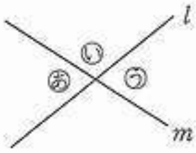
公理や定理は基本的にこの「P ならば Q」という文章になっています．

数学の証明は，原則として，

仮定 P とルール『P ⇒ Q』があると Q が導けて，
Q という情報と『Q ⇒ R』があると R が導けて，
R という情報と『R ⇒ S』があると S が導けて，…

のような構造になっています．

基本例題 1-1（対頂角定理の証明）



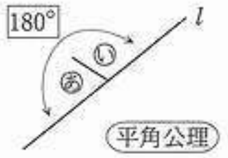
2 直線 l，m が交わっていて，左図のように角あ，い，うを定めるとき，平角公理を利用して

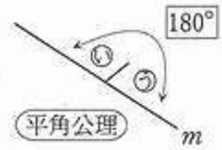
あ＝う

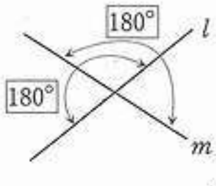
であることを証明しなさい．

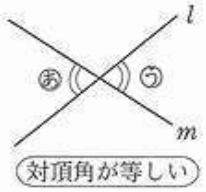
［仮定］ l は直線……………………………①
　　　　m は直線 …………………………②

［結論］ あ＝う









［証明］ ①より，

あ＋い＝180°（平角公理）……………………③

です．一方②より，

い＋う＝180°（平角公理）……………………④

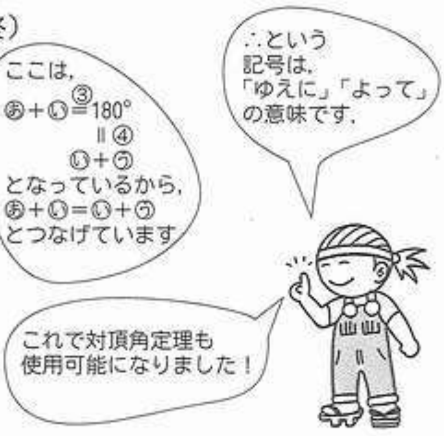
です．よって③，④より，

あ＋い＝い＋う ………………………………⑤

で，⑤の両辺からいをひいて

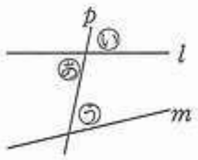
あ＝う

とわかります．（終）



注）証明を書くときには，よく「何がはじめから使っていい情報なのか？」と「何を導きたいのか？」をはっきりさせるために，仮定や結論を上記のように証明を書きはじめる前にまとめたりします．特に仮定には番号をふって「仮定の何を使って導いたのか？」を証明文の中で明確にします．ただし，ここでは第1章の基本例題以外は「結論」を証明前に書くことを省略しています．

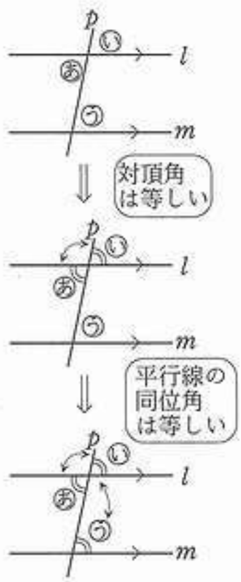
基本例題 1-2（錯角定理の証明）



2直線 l, m に直線 p が交わって，左図のように角あ，い，うを定めるとき，同位角公理や対頂角定理を利用して，以下を証明しなさい．

（1）　$l \parallel m$ ならば，あ＝う．

（2）　あ＝うならば，$l \parallel m$．



（1）［仮定］ $l \parallel m$ ……①

［結論］ あ＝う

［証明］ 2直線 l, p は交わっているので，

あ＝い（対頂角定理）……②

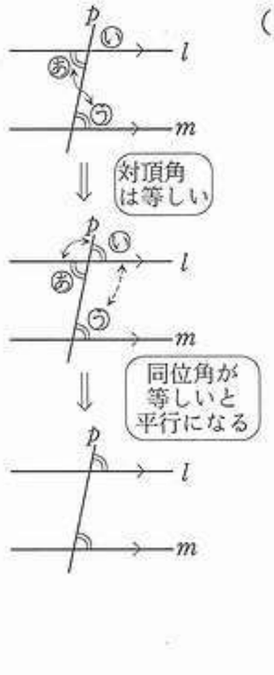
です．一方，①より，

い＝う（同位角公理）……③

です．よって②，③より，

あ＝う

といえます．（終）



（2）［仮定］ あ＝う ……①

［結論］ $l \parallel m$

［証明］ 2直線 l, p は交わっているので，

あ＝い（対頂角定理）……②

です．よって①，②より，

い＝う ……③

とわかり，③より，

$l \parallel m$（同位角公理）

といえます．（終）