はじめに

黒木正憲

確率について学びはじめにおいて「コインを投げるとき，表と裏の出かたは同様に確からしいから，１枚のコインを投げて表の出る確率は 1/2 である」というような記述に出会うと，まず「同様に確からしいから」という言葉に首をかしげることでしょう．コインの表と裏ではデザインがちがうし，またコインの投げかたも問題でしょうから，表と裏が出るのが同様に確からしいとなぜいえるのかということになります．

実際にコインを何回か投げてみても“同様に確からしい”結果はおそらく得られないでしょう．しかし，同様に確からしくなければ，そのような事象は数学の対象とはなりません．そこで，コインを投げるとき，デザインとか投げかたなど捨象してしまって，表と裏の出かたは同様に確からしいことを先験的に認めることにしようというわけです．そういう「同様に確からしい」をコインやサイコロ，くじ引きなどの事象に認めると，ある事象Aのもとにある事象Bが生じる可能性，というものが数学的対象となり，演繹的論理の展開として確率論が生じてくることになります．ところで，実際にあるコインをくりかえし投げてみて，その表と裏の出かたを調べてみたらどうでしょう．たとえば，100回投げて表が47回，1000回投げて表が 513 回，というようなことが生じるでしょうが，表が出る回数は（投げる回数が多いほどその回数の半分に近づく，ということはないにせよ），ほぼ投げる回数の半分であることが観察されるでしょう．事象に対するこのようなコンタクトのしかたからは数学的帰納としての確率論が生じ，統計論が展開されていくことになります．

このように，確率は，中学から高校へと，代数，幾何，代数幾何，解析と積み上げてきた数学の世界とはすこし異質なところがあります．

そういう異質さに戸惑うせいか，確率は大部分の受験生にとって苦手な科目の１つになっています．ところが，入試問題を見ればすぐ気がつくことですが，確率の問題の数学入試に占める頻度はかなり高いのです．しかも，入試の難易のランクにかかわりなく，確率は出題側の好みの分野という傾向を示しています．となると確率を苦手な科目として放っておくわけにはいきません．これまで，確率に関しては，大学入試のための準備書として，あまりいいものがなく，そのことも受験生が確率離れを起してきた原因のひとつになっていたでしょうから，なにか，確率のいい書物が欲しい，というのがかなり以前からのわたしたちの念願でした．

そういうことを背景にして生まれたのが，この書一解法の探求・確率一です．

ここには，学生時代からすでに確率に堪能であった福田邦彦編集部長の30年以上にわたる確率問題の研鑽の成果が凝縮されており，ここ20年間にわたる大学の入試問題や「大学への数学」の学コンの問題で構成されている適切な例題・練習題では，入試における最新の確率問題の傾向を伝えるとともに，確率の的確な理解とその問題のベスト・ソリューションを学ばせてくれることでしょう．確率はいわば独立して学べる科目です．そこで，まず確率を制して，数学入試には自信をもって向かおうではありませんか．

本書の利用法

本書は，'03まで「大学への数学」の増刊号であったものを，最新の教育・入試事情を踏まえてバージョンアップしたものです．

原則編，演習編，発展編

の3つのパートからなることは増刊号時代と同じですが，とくに大きく変えたのは，

原則編の確率の基盤となる部分（p.16～27）で，高校の必修部分の確率が以前に比べて身軽になったことを考慮して，よりすっきりとスリムな解説を心掛けました．

原則編について：　場合の数から数Aの確率さらに数Cの確率分布までを解説しています．読者対象として，初めて高校の確率を学ぶ人，一応学んだつもりだけどあれこれモヤモヤしている人を想定しています．

解説，例題，練習問題という順に話を進めていますが，確率アレルギーを解消するには，易しいことの足固めだけではなく，それと並行して，確率の有用さと面白さを予感（できれば実感）してもらうことも必要な処方です．そこで，例題や練習問題のレベルは入試の基本～標準を原則にしていますが，3題につき1題程度は，原則編としてはあえて，「良薬口に苦し」の問題を選びました．

なお，練習問題の問題番号に＊がついているものは，解くのに極限など数Ⅲの知識が必要であることを意味します．また，原則編13の「微積分と確率」では一部，数Ⅲのみならず数Cの確率にも踏みこみました．

解説中に右のようなマークのある箇所がところどころにありますが，これはとくに強調したい重要部分です．◆

演習編について：　ここでは，統計以外を

場合の数，数Aの確率，数Cの確率分布

の3ブロックに分けて問題演習をします．

入試の典型問題は原則編の範囲と見なしたので，ここでは入試問題の標準～発展レベルの問題の中から，とくに，演習価値が高いこと，そして原則編で述べたように面白い（興味深い）問題であることを重視して選びました．

問題の難易のランクは，大学入試の問題を難易で1～10の10ランクに等分した上で，

1～5……A（基本），6～7……B（標準）
8～9……C（発展），10 ……D（難問）

とA～Dの4段階に分けてあります．また，答案を作るのに目標としてほしい制限時間は＊1につき10分で，各ブロックの問題編の最後のページにランク表をつけました．

原則編は終わったけど，まだ自信のない人は難易度Bに絞ってもよいでしょう．（Aはナシ）

なお，入試で数Aしか課題にならない予定の人は数Cの演習は必要ありませんが，数Cの確率に触れることによって，数Aの確率に対する理解も深まる面があるので，余裕のある人はぜひ，数Cの世界にも踏みこんでください．

発展編について：　場合の数と確率の有名問題の紹介と，「大学への数学」が長年にわたって開発してきた問題や解法を紹介することが，ここでの主なテーマです．

最後の統計を除いて，各話題2ページずつにすぎませんが，どれも中身はかなり濃厚なので確率に興味のある人には十分に満足してもらえるでしょう．そうでない人も，興味が湧くきっかけになれば幸いです．

解法の探求・確率　目次

本書で使う記号について：

まず，解答の 解 などにつけた☆，★について．

☆……巧妙ではあるが，ぜひ身につけてほしい解法．

★……相当に巧妙で，思いつかなくても心配のいらない解法．

次に，主に解答の最後にある注意事項，研究事項について．

⇨注，▨研究……すべての人のためのもの．

➡注，■研究……意欲的な人のためのもの．

なお，前ページにも，＊，B＊＊などの記号の説明があります．

♡表紙 Photo／甲府盆地での大手毬　福田晴美

原則編 1

場合の数(1)／数A

順列と組合せ

確率を確立するための第一歩は，

場合の数の両輪である順列と組合せの個数と仲よしになることです．

幼いころから，「兄ちゃんより僕のおやつが少ないよ〜う」などと，ものを数え続けてきた私たちには，「たかが数えることなんて」という意識がありますが，実際には，意外に難しい面（そして面白い面）があります．

そういう意識と現実とのギャップこそが，確率は苦手だという諸君をどの分野にもまして多く生みだしている元凶なのでしょう．

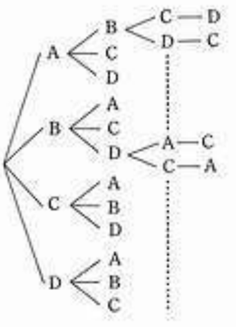
いかにも原始的に思える‘数える’ことにも工夫や技術を必要とするということであって，ここでは，確率につなげるために是非身につけておきたい，順列と組合せに関する数える技術について解説することにしましょう．

1．順列を数える順序

A，B，C，Dの4文字を一列に並べて作られる順列の総数は，

$$4\times3\times2\times1=24 \text{ 通り}$$

です．



これは，右図のような樹形図からすぐにわかることです．

この24通りのうち，Aが1番目のものは，

$3\times2\times1=6$ 通り

であることもすぐにわかるでしょう．

では，Aが2番目のものは？　これは，

$$(4\times3\times2\times1)\div4=3\times2\times1 \text{ 通り}$$

と数えることができます．というのは，たとえば，Aが2番目である順列の個数を A_2 で表すことにすれば，

◆A，B，C，Dの順列においては，
A，B，C，Dは **対等** であるから，
当然，$A_2=B_2=C_2=D_2$ となるはず

であるからです．

すると，たとえば，AかBが2番目であるものの個数は，

$$A_2+B_2=(3\times2\times1)\times2 \quad\cdots\cdots①$$
$$=2\times(3\times2\times1) \text{ 通り} \quad\cdots\cdots②$$

この②を左から順に見ていくと，

- 最初の2は，2番目がAかBの2通りの2
- つぎの3は，1番目として，2番目の文字を除く3通りの可能性があることの3
- つぎの2は，……

を意味し，このことはさらに，

◆順列というものは，作られる段階においては，たとえ‘左から順に’であったにせよ数えるときは，何番目から数えようと自由である

を意味することになります．

この **数える順序の自由さ** こそが順列のもっている最大の特徴であって，それは，

対等性と，積の交換法則（①→②）

によって導かれるわけですが，当然のことだ，という感覚の人も少なくないでしょう．

数える順序が自由なら，当然，

できるだけ数えやすい順序

を設定して数えるべきです．

例題 1.　0～9の10個の数字から異なる3個を選んで3桁の整数を作るとき（たとえば，012 は3桁でないものとする），
（1） 全部で何通りできるか．
（2） 偶数は何通りできるか．

どういう順序で数えるのがよいか，頭の中で見ぬいてから数えてください．

解　3桁の整数を ABC とする．

（1） $A \neq 0$ に注意して，A⇨B⇨Cの順に数えると，$9\times9\times8=$**648 通り**．

（2） C＝偶数（0, 2, 4, 6, 8）で $A\neq0$ である順列の個数を数えればよいが，C⇨A⇨Bの順に数えると，

$C=0$ であるものは，$1\times9\times8$ 通り

$C\neq0$ であるものは，$4\times8\times8$ 通り

で，答えは，$8\times(9+32)=$**328 通り**．

◆順列は一般に，'規制の強い順' に数えるのがよい．

練習問題（解答は p.52）

1．1から9までの数字から異なる5個をとって作った順列のうちで，つぎの条件をみたすものの個数をそれぞれ求めよ．
（1） 奇数番目に必ず奇数がある．
（2） 奇数は必ず奇数番目にある．
（78　東海大・理）

2. 順列の束である組合せ

異なる n 個から，たとえば3個を選んで作られる順列の個数は，樹形図をイメージして，

$$n\times(n-1)\times(n-2)\text{ 通り}$$

と数えることができますが，一般に，

> n 個の異なるものから r 個を選んで作られる **順列の個数** は，
> $n\times(n-1)\times\cdots\times\{n-(r-1)\}$ 通り …①
> であり，この個数を ${}_n\mathrm{P}_r$ と記号化する．

さて，この順列の個数①はつぎのように数えることもできます．

①は，とりあえず n 個から r 個の組合せを選んでから（この組合せが x 通りあるとする）その r 個を並べて作られる順列の総数であるから，

$$① = x\times{}_r\mathrm{P}_r$$

これから x が得られます．つまり，

> n 個の異なるものから r 個を選んで作られる **組合せの個数** は ${}_n\mathrm{C}_r$ と記号化されていて，上のことから，
> $${}_n\mathrm{C}_r=\frac{①}{{}_r\mathrm{P}_r}=\frac{{}_n\mathrm{P}_r}{r!}=\frac{n!}{(n-r)!r!}$$

◆ようするに，${}_n\mathrm{C}_r$ は，${}_n\mathrm{P}_r$ 通りの順列の $r!$ 個ずつを束にしたときの束の数であるということです．この

同じ個数からなる束，という観点

は場合の数，確率のどちらにおいても非常に重要で，たとえばつぎの問題でも応用できます．

例題 2.　SHODAIという語の全部の文字を用いてつくる順列の中で，
母音O，A，Iがこの順にあるもの
はいくとおりあるか．　（84　熊本商大）

ごく平凡には，まず母音3文字（O, A, I）の '場所の組合せ' を決めてから母音を並べ，つぎに子音3文字（S，H，D）を並べると考えるところで，すると，

$${}_6\mathrm{C}_3\times1\times3!\text{ 通り}$$

となりますが，…….

解　答えを x 通りとすると，なんの制約もない6文字の順列の個数について，

$$x\times3!=6!$$

よって，$x=6\times5\times4=$**120 通り**

⇨注　6!通りの順列のうちに，題意に適するものは3!通りにつき1つの割合である，と考えたわけで，このことから，O，A，Iがこの順に並ぶ確率は 1/3! であることが瞬間的にわかります．

なお，「まず子音3文字を自由に並べてから母音を並べる」と考えて，$(6\times5\times4)\times1$と数えるのも上手な数え方です．

演習編 1　場合の数　数A

1·1　TOMATO の 6 文字をすべて用いる順列は □ 通りある．この中で TO という文字列を 1 個以上含む物は □ 通りある．

（01　武蔵大・社）

1·2　YAMANAMI の 8 つの文字を横一列に並べるとき，次の条件をみたす並べ方はそれぞれ何通りか．

（1）　A が 2 つ以上続く．

（2）　A が 2 つ以上続き，かつ，M も 2 つ続く．　　（01　山形大・理）

1·3　3 種の文字 a，b，c をくり返し用いて n 個の文字からなる列をつくるとき，a，b，c がすべて含まれている列は □ 通りである．

次に，4 種の文字 a，b，c，d を用いて n 個の文字からなる列をつくるとき，a，b，c，d がすべて含まれている列は □ 通りである．　　（01　東京農大）

1·4　赤いボール 9 個，白いボール 6 個がある．これらのボールを 1 列に並べる方法 ${}_{15}C_6$ 通りのうちに，

白いボールは隣り合わず，どの赤いボールも白いボールと隣り合っているもの

は何通りあるか．（97　昭和女子大，一部省略）

1·5　2000 の正の約数の個数と，約数の和を求めよ．ただし，1 と 2000 も約数であるとする．　　（00　滋賀医大）

1·6　1 から 2000 までの自然数の集合を A とするとき，次の個数をそれぞれ求めよ．

（1）　A の要素のうち，7 または 11 かいずれか一方のみで割り切れるものの個数．

（2）　A の要素のうち，7，11，13 のいずれか 1 つのみで割り切れるものの個数．

（00　奈良女子大・理系）

1·7　次の条件を満たす正の整数全体の集合を S とおく．

「各桁の数字は異なり，どの 2 つの桁の数字の和も 9 にならない」

ただし，S の要素は 10 進法で表す．また，1 桁の正の整数は S に含まれるとする．

（1）　S の要素でちょうど 4 桁のものは何個あるか．

（2）　小さい方から数えて 2000 番目の S の要素を求めよ．　　（00　東大・理系）

1·8　男の子 4 人，女の子 3 人が円いテーブルに座るとき，どの男の子の横（左右少なくとも一方）にも女の子がいるような座り方は □ 通りである．なお，7 人はすべて区別し，一方を回転させるともう一方に一致するような 2 つの座り方は同じものと見なして数えよ．

（99　立教大・経）

1·9　集合 A，B は $X=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$ の部分集合（X および空集合 ϕ も含む）とし，

$$A\cup B=X$$

を満たすものとする．

（1）　A，B に共通の要素がないとき，2 つの集合 A，B の選び方は全部で □ 通りある．

（2）　A，B に共通の要素があってもよいものとすると，2 つの集合 A，B の選び方は全部で □ 通りある．

（01　理科大・工，改題）

解答は p.78〜83

1·10 （1） 数 100 を 3 個の自然数の和として表す．加える数は同じ数を用いてもよいしさらに加える順序が異なれば表し方は異なると考えると，何通りの表し方があるか．

（2） 数 100 を 3 個の自然数 x，y，z の和として表すとき，$x \leqq y \leqq z$ となるような表し方は何通りあるか．（00 広島修道大・商）

1·11 赤球 6 個と青球 4 個を A，B，C の 3 人で分けるとき，次の場合の分け方は何通りあるか．ただし，同じ色の球は区別しないものとする．

（1） 3 人とも赤球を少なくとも 1 個もらい青球も少なくとも 1 個もらう場合．

（2） 3 人とも少なくとも 1 個の球をもらう場合．（01 法政大・社）

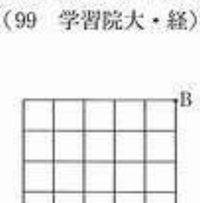
1·12 男女 6 人ずつ 12 人を 4 人ずつ 3 つのグループに分ける．

（1） このような分け方は何通りあるか．

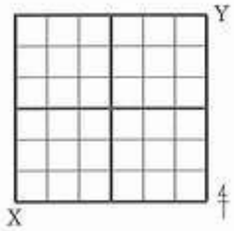
（2） 各グループが男女 2 人ずつとなる分け方は何通りあるか．

（3） （2）のように分けるとき，女 A さんと男 B さんが同じ組になる分け方は何通りあるか．（99 学習院大・経）

1·13 右図のような 1 つのます目が 10m 四方の道路がある．10m ずつの直進をくり返して点 A から点 B へ移動するとき，移動距離が 110m 以下の道順は何通りあるか．ただし，移動の途中で A，B は通らないものとする．（00 法政大・法）



1·14 右図のように南北に 7 本，東西に 7 本の道路をもつ町がある．太線で示した道路（南北 3 本，東西 3 本）は大通りで



(a) 大通り以外の道路から大通りにぶつかったときは直進と右折の禁止

(b) 大通りから大通り以外の道路へは右折のみ禁止

という規制が敷かれている（他の交差点では直進，右折，左折が自由にできる）．

このとき，X から Y への最短の経路は何通りあるか．（00 島根医大，改題）

1·15 座標平面において，

7 本の平行線 $x=k$ （$k=0, 1, \cdots, 6$）

と 5 本の平行線 $y=l$ （$l=0, 1, \cdots, 4$）

が交わってできる長方形を考える．このとき 2 点 $\mathrm{A}\left(\dfrac{5}{2}, \dfrac{3}{2}\right)$，$\mathrm{B}\left(\dfrac{7}{2}, \dfrac{5}{2}\right)$ のどちらも内部には含まない長方形はいくつあるか．

（97 九州産大，改題）

1·16 半径 1 の円周上に，$4n$ 個の点 P_0，P_1，$\cdots$，P_{4n-1} が時計回りに等間隔に並んでいるとする．

（1） 線分 $\mathrm{P}_0\mathrm{P}_k$ の長さが $\sqrt{2}$ 以上となる k の範囲を求めよ．

（2） 点 P_0，P_1，$\cdots$，P_{4n-1} のうちの相異なる 3 点を頂点に持つ三角形のうち，各辺の長さがすべて $\sqrt{2}$ 以上になるものの個数 $g(n)$ を求めよ．（01 阪大・理系）

確率／数A

解答と解説

2·1 どういう確率を計算し，その数値をどう解釈したらよいかが聞かれていて，ユニークな良問です．

解 100日の記録は右の通りで

$a=100-(25+5+45)=25$

したがって，

	雲	非雲
雨	25	5
非雨	a	45

1° 100日のうちで，雨の日は30日．

2° 雲がかかったのは50日で，うち雨の日は25日．

であるから，「今日は雨が降る」という発言を，

デタラメにいうと，的中率は0.3 ……………………①

言いつたえによると，的中率は0.5 ………………②

この①，②を比較すると，言いつたえは

ある程度は正しい

⇨注 ②から「言いつたえはアテにならない」ともいえるのですが，②の的中率は①の的中率と比較してその正しさの程度を判断しなければなりません．たとえば，「24時間以内に東海地方に大地震がおきる確率は0.3である」という発言が真実だとすれば，0.3にすぎなくても，ものすごく重大な発言です．

2·2 なにを同様に確からしいとするか，いろいろと考えられます．

解 ○○，××，○×のカードをそれぞれ◎，✖，△で表すことにする．4枚のカードの並べ方は，4枚を区別し裏表も考慮に入れて数えると，

$4!\times 2^4$ 通り

で，これらのうち，○×○×となるのは右の4タイプがあり，各タイプ

2^3 通り

の並べ方がある（◎，✖はどちらの面を上にするか各2通り，2つの△についてはどちらのカードを左にするか2通り）．

1° ◎ ✖ △ △
2° ◎ △ △ ✖
3° △ ✖ ◎ △
4° △ △ ◎ ✖

したがって，求める確率は

$$\frac{2^3\times 4}{4!\times 2^4}=\mathbf{\frac{1}{12}}$$

別解·1 ◎と✖の裏表を区別せず，さらに2枚の△も区別しない（裏表は区別する）ものとすれば，4枚の並べ方は $4\times3\times2^2$ 通りで，○×○×となるのは1°～4°各1通りずつであるから，求める確率は，

$$\frac{4}{4\times3\times2^2}=\mathbf{\frac{1}{12}}$$

別解·2☆ 2枚の△は，○と×が上になることが必要で，このようになる確率は $\frac{1}{2}$ である．この確率に，

○，○，×，×の4枚を並べて○×○×となる確率を掛ければよい．あとの確率は，

$$\frac{2\times2}{4!}=\frac{1}{6}$$

したがって，求める確率は $\frac{1}{2}\times\frac{1}{6}=\mathbf{\frac{1}{12}}$

⇨注 別解1の $4\times3\times2^2$ 通りは，解の $4!\times2^4$ 通りを $2^3=8$ 個ずつ束にした束数です．

別解2のあとの確率は，2つの○の位置に着目するのが明快で，$1\div{}_4C_2$

2·3 順列は，実際に並べられた順序にしたがって数えないといけない，ということはありません．（☞p.6）

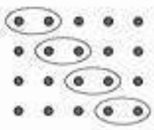
解 5枚の順列は $9\times8\times7\times6\times5$ 通り ………………①

（1） ①のうちの両端が奇数である順列の個数を，まず左端，次に右端，そのあと2～4番目の順序で数えると奇数のカードは5枚あるから，

$5\times4\times(7\times6\times5)$ 通り……………………②

求める確率は，$②\div①=\frac{5\times4}{9\times8}=\mathbf{\frac{5}{18}}$

（2） 1と9が隣りあうような順列は，まず1と9の場所について，右の4タイプがあり，各タイプ，1と9については2通りの並べ方があり，残り3つについては $7\times6\times5$ 通りの並べ方があるから，求める確率は



$$\frac{2\times(7\times6\times5)\times4}{9\times8\times7\times6\times5}=\mathbf{\frac{1}{9}}$$

別解☆［順列ではなく組合せで考えると］

（1） 両端に並べられる2数の組合せは ${}_9C_2$ 通りあって，これらは同様に確からしい．その組合せがともに奇数であるものは ${}_5C_2$ 通りあるから，求める確率は

$$\frac{{}_5C_2}{{}_9C_2}=\frac{5\times4}{9\times8}=\mathbf{\frac{5}{18}}$$

（2） 9枚とも1列に並べ，はじめの5枚を取り出す5枚と考える．このとき1と9の場所の組合せは ${}_9C_2$ 通りあり，そのうちで1と9がはじめの5枚であって隣り合うものは4通りであるから，答えは $\frac{4}{{}_9C_2}=\mathbf{\frac{1}{9}}$

2·4 7面体のサイコロを3回投げる問題です.

(3)だけでなく(5)も余事象が効果的です.

解 (1) 7^3 通りの順列 $(x,\ y,\ z)$ のうち,

$x>y>z$ をみたす順列は ${}_7C_3=7\cdot5$ 通りあるから,

$$\frac{7\cdot5}{7^3}=\mathbf{\frac{5}{49}}$$

(2) $y=k$ のとき, $y>x$ かつ $y>z$ をみたす順列 $(x,\ y,\ z)$ は $(k-1)^2$ 通りあるから, 求める確率は,

$$\sum_{k=2}^{7}(k-1)^2\div7^3$$
$$=\frac{1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2}{7^3}=\frac{7\cdot13}{7^3}=\mathbf{\frac{13}{49}}$$

(3) xyz は奇数 $\Longleftrightarrow x,\ y,\ z$ のすべてが奇数であるから, 求める確率は,

$$1-\frac{4^3}{7^3}=\mathbf{\frac{279}{343}}$$

(4) $x+y+z$ は偶数

$\Longleftrightarrow x,\ y,\ z$ のすべてが偶数

or 1個が偶数で2個が奇数

で, これをみたす順列 $(x,\ y,\ z)$ は,

$$3^3+(3\cdot4^2)\times3=171 \text{ 通り}$$

よって, 求める確率は $\mathbf{\dfrac{171}{343}}$

(5) $x+y+z\leqq9$ となる3数の組合せは

1° $\{1,\ 1,\ 1\}$, $\{2,\ 2,\ 2\}$, $\{3,\ 3,\ 3\}$

2° $\{1,\ 1,\ 2\}$, $\{1,\ 1,\ 3\}$, $\{1,\ 1,\ 4\}$, $\{1,\ 1,\ 5\}$
$\{1,\ 1,\ 6\}$, $\{1,\ 1,\ 7\}$
$\{2,\ 2,\ 1\}$, $\{2,\ 2,\ 3\}$, $\{2,\ 2,\ 4\}$, $\{2,\ 2,\ 5\}$
$\{3,\ 3,\ 1\}$, $\{3,\ 3,\ 2\}$, $\{4,\ 4,\ 1\}$

3° $\{1,\ 2,\ 3\}$, $\{1,\ 2,\ 4\}$, $\{1,\ 2,\ 5\}$, $\{1,\ 2,\ 6\}$
$\{1,\ 3,\ 4\}$, $\{1,\ 3,\ 5\}$, $\{2,\ 3,\ 4\}$

で, 1°の組合せから各1通り, 2°の組合せから各3通り, 3°の組合せから各6通りの順列が作られるから, 答えは

$$1-\frac{3\times1+13\times3+7\times6}{7^3}=1-\frac{12}{7^2}=\mathbf{\frac{37}{49}}$$

別解☆ [(2)と(5)はもっとうまい手あり]

(2) $y>x>z$ or $y>z>x$ or $y>x=z$

であればよいから, 求める確率は,

$$\frac{{}_7C_3+{}_7C_3+{}_7C_2}{7^3}=\mathbf{\frac{13}{49}}$$

(5) $x+y+z\leqq9$ をみたす順列 $(x,\ y,\ z)$ の個数は, w を自然数として,

$$x+y+z+w=10$$

をみたす順列 $(x,\ y,\ z,\ w)$ の個数 ${}_9C_3=84$ に等しい.

(☞p.11, 4°. 以下, 省略)

2·5 双六でいえば, N 面体のサイコロをふっていくとき, k 番目の場所でとまる確率が $P_N(k)$ です.

(2)はなかなか難しい問題ですが, (1)によって結論を予想することなら簡単でしょう.

解 (1) $P_N(1)$ は1枚目の番号が1である確率で

$$P_N(1)=\mathbf{\frac{1}{N}}$$

$P_N(2)$ は1枚目の番号が2であるか, 2枚目までの番号の和が2となる (1+1 しかありえない) 確率で,

$$P_N(2)=\frac{1}{N}+\frac{1}{N}\cdot\frac{1}{N}=\mathbf{\frac{N+1}{N^2}}$$

$P_N(3)$ は1枚目の番号が3であるか, 2枚目までの番号の和が3となる (1+2 か 2+1) か, 3枚目までの番号の和が3となる (1+1+1 のみ) 確率で,

$$P_N(3)=\frac{1}{N}+\frac{1}{N}\cdot\frac{1}{N}\cdot2+\frac{1}{N}\cdot\frac{1}{N}\cdot\frac{1}{N}=\mathbf{\frac{(N+1)^2}{N^3}}$$

(2) $N-1$ 以下の自然数の定数 n について,

$$k=1,\ 2,\ \cdots,\ n \text{ のとき, } P_N(k)=\frac{(N+1)^{k-1}}{N^k}\ \cdots\cdots①$$

であると仮定する.

$P_N(n+1)$ を1枚目の番号が $n+1,\ n,\ \cdots,\ 1$ のどれであるかで場合を分け, ①を使って計算すると,

$$P_N(n+1)=\frac{1}{N}\cdot1+\frac{1}{N}\cdot P_N(1)+\cdots+\frac{1}{N}\cdot P_N(n)$$
$$=\frac{1}{N}\left\{1+\sum_{i=1}^{n}\frac{(N+1)^{i-1}}{N^i}\right\}$$
$$=\frac{1}{N}\left\{1+\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{N+1}{N}\right)^{i-1}\right\}$$
$$=\frac{1}{N}\left\{1+\frac{1}{N}\cdot\frac{\left(\frac{N+1}{N}\right)^n-1}{\frac{N+1}{N}-1}\right\}$$
$$=\frac{(N+1)^n}{N^{n+1}}$$

よって, ①の等式は $k=n+1$ のときも成り立つ.

また(1)により, ①は $n=1$ のときに正しいから, 数学的帰納法により, $k=1,\ 2,\ \cdots,\ N$ について①である.

別解☆ [(2)を帰納法でなく, 漸化式を立てる方針で解くとすると,]

上の〰〰の式と, n を $n-1$ に置きかえた等式について, 辺ごとに引くと, $n\geqq2$ のとき,

$$P_N(n+1)-P_N(n)=\frac{1}{N}\cdot P_N(n)$$

$$\therefore\ P_N(n+1)=\frac{N+1}{N}\cdot P_N(n)\ \text{(等比数列)}$$

よって, $P_N(k)=\left(\dfrac{N+1}{N}\right)^{k-2}\cdot P_N(2)=\mathbf{\dfrac{(N+1)^{k-1}}{N^k}}$