はじめに

黒木正憲

こんなクイズがあります．

昔，アフリカを探険していたひとりの数学者が食人種の蛮族につかまりました．酋長は宣言します．

「おまえは火炙りか縛り首で殺される．おれはその殺しかたを決めているのだが，それを当ててみろ．もし，当ったら火炙りにし，当らなかったら縛り首にする．」

数学者は「縛り首」と答えて，殺されずにすみました．

なぜなら，酋長が火炙りにしようとすると，当たらなかったのだから縛り首にしなければならないし，縛り首にしようとすると，当たったのだから火炙りにしなければならないしで，どちらの殺しかたもできないということになるからです．

もうひとつ，こんなクイズはいかがですか．

「人が死ぬと，やがて地獄へと極楽へとの別れ途にさしかかるのだそうです．そこには，まったく見分けのつかない2匹の鬼がいて，1匹はホントしかいわない鬼，1匹はウソしかつかない鬼です．そこでは，どちらかの鬼に1つだけの質問が許されていて，答えには，yes か no が返ってくるだけです．

もし，あなたが極楽への途にすすみたかったら，なんと質問しますか」

答えは，1匹の鬼に向かって，「もう1匹の鬼に対してわたしが，こちらは極楽への途ですか，と尋ねたら，なんと返事するでしょう」といって，yes と答えたら，もうひとつの方の途を，no といったら，その途を選べばそれが極楽への途ということになります．

さあ，質問した鬼が，ウソつきと，ホントだけいう鬼との場合に分けて，上の尋ねかたが適切であることを論証してみませんか．

数学はいわば論証の学問です．そこでは，人種，宗教，信条，生活，貧富，年令，性格などに関せず，ひたすら論証の正確さによって構成される学問です．したがって数学ができるようになるためには，論証に強くならなければなりません．

数学の論証は，一般に，AならばBであり，BならばCである，というような，いわゆる演繹法によって行われます．あるいは，時に，すべての自然数 n についてなりたつことを証明する問題においては，

その命題は，$n=1$ のときなりたつ．$n=r$ のときなりたつと仮定すれば，$n=r+1$ のときなりたつ．

それで，すべての自然数 n についてなりたつ．

というような，数学的帰納法によって論証されることもあります．

また，ある命題：AならばBである，ことの証明において，その命題が真ならば，その対偶，すなわち

BでないならばAでない，ことも真であることから，いわゆる対偶法によって論証することも行われます．たとえば，「自然数 x，y の積 xy が奇数ならば，x，y はともに奇数である」という命題の証明には

x または y が偶数ならば，xy は偶数である，と論証すればよいことになります．ここで，x かつ y は奇数である，ことの否定は，x または y が偶数である，ということに注意しましょう．

また，Aのとき，BまたはCである，タイプの問題の証明においては，上のような対偶法を用いなくても，Bの否定を $\overline{B}$ として，Aかつ $\overline{B}$ のとき，Cである，ことを論証して，はじめの命題を証明することもできましょう．

そのほか，数学の問題の論証には，ディリクレの引出し論法（部屋割り論法，鳩の巣原理）の使いかたを心得てないとこまることもあります．

たとえば，たて，よこが 10m と 5m の長方形の平らな紙の上に硬貨を51枚ばらまくと，すくなくとも，そのうちの2枚は，距離が $\sqrt{2}$ m 以内であることを示せ．

という問題では，この長方形を1辺の長さが 1m の正方形50個に分けると，そのうちのすくなくとも1つには2枚の硬貨があることになって，命題が証明されます．

ともかく，数学を決めるのは論証です．したがって，数学に強くなるには，論証力を鍛えなければなりません．

この書は，そのためのまたとない恰好の教材です．

本書の利用法

福田邦彦

数学で必要な力といえば，

計算力，発想力，論証力

が3本柱です．計算力については，ある程度は具体的なイメージをもつことができるでしょうが，発想力や論証力になると，重要性は感じて

発想力をつけたい

論証力を鍛えたい

という想いはあっても，では論証力とは具体的にどんな力かと踏みこんで考えると，イメージが揺らいでしまう読者が多いに違いありません．

本書を読んでも「論証力とは？」に対する明確な回答を得ることはできないかもしれませんが，本書を読み進めていくうちに，

いままで，なにかモヤモヤしていたところが，ずいぶんクリアーに理解できるようになってきた

とか，

いままで，いきあたりばったりであった議論の展開を，筋道だって進められるようになってきた

という感触が得られるでしょう．そういう実感こそが，

論証力の向上

であって，最終的には，

数学のソコヂカラの向上

をはかってもらうことが，本書の目標とするところです．

次ページの目次を見ればわかるように，本書は3部から成り立っています．まず，第1部のインフラアップ（基盤整備）では，論理の基本を学びます．数Aの教科書に現れる

論理用語の正確な意味の確認

基本論法についての理解

が課題ですが，教科書や一般の参考書にはない記述も少なくはないので初心者だけでなく，一通り知っていた人も収穫が得られることでしょう．とはいえ，第1部はあくまでも基盤整備です．たとえば，バレーボールの試合でプレーすることが最終目標だとすれば，第1部はバレーボールという競技のルールを知るという程度でしかありません．

次に第2部の論理の運用について．大学入試の問題で，論証というタイトルのつくものは，

(1) 命題の真偽や条件の必要・十分性を問うタイプ

(2) 論証色が濃く，発想力も必要な数学オリンピック調のタイプ

に2分されます．(1)は形式的であって数学的内容の乏しいものがほとんどですが，このタイプの対策だけなら，第1部だけでほぼ用が足ります．しかし，論証力を鍛える目的はそういう'いかにも命題'の問題を解くことではなく，

ごく一般的な問題

において，正確で適確な議論をするためにこそあるはずです．第2部では，そういう'生きた論理'の運用の話が中心で，バレーボールでいえば，サーブ，守備，攻撃というゲームでの一連のチームプレーにおいて論理がいわばセッターの役割をはたすことを実感してもらいます．

第2部は筆者が「大学への数学」で論証力育成講座と銘うって，2年間にわたって連載したものをベースにしています．ところどころ高度な話題もありますが，ほとんどが数Iと数A（とそのちょっとした延長）の範囲ですから，特別な知識は必要としないはずです．一読しただけでは理解しにくいだろうと思われる，★をマークしたところは，あせらずにじっくりと読みこんでください．少し時間はかかっても，大きな成果が得られることでしょう．

第2部には，本文の右側に傍注がありますが，▩をマークしたものはすべての読者向け，□をマークしたものは初心者向けのものです．

第3部では，左で述べた(2)のタイプをとりあげます．論証力だけではなく発想力も必要で，なかなか素手では太刀打ちできない問題も少なくありません．バレーボールでいえば，ジャンピングサーブ，クイック攻撃などの特殊な技術を身につけてもらうための第3部です．

一問一問をじっくり考えて読み進めて下さい．頭の中だけでできたと思っても，実際に答案を書くとうまく伝えられないこともあります．できれば，解答をきちんと書いてから，本書にある解説を読むのがよいでしょう．論証力を問われる問題においては，計算や解法の発想だけでなく，答案で論理展開がきちんとなされているかの表現力もポイントです．

数学を決める論証力

目次

§1 論理用語の確認

1 条件と命題

［1］ **命題**

真偽を判定することのできる文や式．例．「$1+2=3$」(真)，「$x>-1$ ならば $x^2>1$」(偽)

［2］ **条件**

変数を含む文や式で，変数に具体的な値を代入すると真偽が決まるもの．

例．「x は偶数である」($x=1$ のときは偽，$x=2$ のときは真，……)

以下，p，q は条件を表し，p を真にする変数の値の全体(真理集合)を P というように表す．

［3］ **p かつ q，p または q**

p かつ q ……… p，q がともに真のときに限って真となるような条件．

p または q …… p，q の少なくとも一方が真のときに真となるような条件．

［4］ **p の否定 $\overline{p}$**

$\overline{p}$ の真理集合は，p の真理集合 P の補集合（P に属さない要素からなる集合 $\overline{\mathrm{P}}$）

［5］ **ド・モルガンの法則**

$\overline{p \text{ かつ } q} \iff \overline{p}$ または $\overline{q}$，　$\overline{p \text{ または } q} \iff \overline{p}$ かつ $\overline{q}$

（$\iff$ は同値記号で，真偽を共にすることを意味する）

プラスアルファ

［1］ 命題「$x>-1$ ならば $x^2>1$」は，次ページで説明するように，

$x>-1$ をみたすすべての x が $x^2>1$ をみたす

を意味します．したがって，

$x>-1$ をみたすのに $x^2>1$ をみたさない ……①

ような x が1つでもあれば，上の命題は偽となります．たとえば，$x=0$ は①に適する例で，このように偽であることを示す1つの例を「反例」といいます．

［2］ 変数は2種類以上あってもかまいません．たとえば，「直線 $x-2y=1$」とは，

条件 $x-2y=1$ の真理集合

を座標平面上で表現したものに他なりません．

［3］ 2つの集合を「かつ，または」で結ぶ記号として「$\cap$，$\cup$」がありますが，条件を結ぶ場合は（教科書にはありませんが）「$\wedge$，$\vee$」が用いられます．

ここで，$\vee$ に関する常識テストを1題．

$3>2$ はもちろん真であるが，$3\geqq 2$ の真偽は？

答えはこのページの最後．

［4］ 世のすべての女性は，賢いか愚かの2タイプに分けられ，さらに，気立てがよいか意地悪の2タイプにも分けられるものとしましょう．

すると，「気立てがよく賢い」の否定は？ 「意地悪で愚か」ではありません．

というのは，すべての女性は右の(1)〜(4)の4タイプに分けられ，p の否定は，

p 以外のすべて

を意味するので，(1)の否定は(2)，(3)，(4)を合わせたものになるからです．(4)は(1)のいわば'反対'で，否定と反対を混同しないように．

(1) 気立てがよく賢い
(2) 気立てがよく愚か
(3) 意地悪で賢い
(4) 意地悪で愚か

なお，否定を考えるときは「全体」を定める大前提が必要で，上では女性を前提にしています．人間を前提にすると，(1)の否定として男性も加わってしまいます．

［5］ 「$\overline{p\wedge q} \iff \overline{p}\wedge\overline{q}$」としがちですが，これは上の話で，(1)の否定を(4)とするような間違いです．

また，「賢いか気立てがよい」ことが結婚相手の条件だとすると，条件をみたさないのは「愚かで意地悪」な女性に限られることを考えれば，

$$\overline{p\vee q} \iff \overline{p}\wedge\overline{q}$$

であることが実感として理解できるでしょう．

◆ $3\geqq 2$ の真偽について，$a\geqq b$ は「$a>b\vee a=b$」を意味するので，$3\geqq 2$ は真．（$3\geqq 3$ も真）

② $p \Rightarrow q$ の形の命題

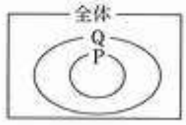
［1］ $p \Rightarrow q$（p ならば q）

これはたんなる命題にすぎず，「$p \Rightarrow q$ が真である」と主張しているわけではない．真であることを主張したいときは「$p \Rightarrow q$ は真である」とか「$p \Rightarrow q$ が成り立つ」と書く．

なお，「$p \Rightarrow q$ が真である」とは「p を真にするすべての値が q を真にする」ことを意味する．すなわち，真理集合について「$\mathrm{P} \subseteqq \mathrm{Q}$」を意味する．

［2］ 「$p \Rightarrow q$」$\Longleftrightarrow$「$\overline{p} \vee q$」

$\overline{p} \vee q$ が真とは「すべての値が $\overline{p}$ か q をみたす」という意味で，［1］により，



「$p \Rightarrow q$ は真」$\Longleftrightarrow$「$\mathrm{P} \subseteqq \mathrm{Q}$」$\Longleftrightarrow$「$\overline{\mathrm{P}} \cup \mathrm{Q}$ は全体」$\Longleftrightarrow$「$\overline{p} \vee q$ は真」

［3］ 逆命題

$q \Rightarrow p$ を $p \Rightarrow q$ の逆というが，真である命題の逆が真とは限らないことは，［1］の約束から明らかであろう．（逆も真になるのは，$\mathrm{P}=\mathrm{Q}$ のときのみ）

［4］ 対偶

$\overline{q} \Rightarrow \overline{p}$ を $p \Rightarrow q$ の対偶という．$\mathrm{P} \subseteqq \mathrm{Q} \Longleftrightarrow \overline{\mathrm{Q}} \subseteqq \overline{\mathrm{P}}$ により対偶は元の命題と同値である．
（$\overline{p} \Rightarrow \overline{q}$ を $p \Rightarrow q$ の裏という．裏は対偶の逆で，元の命題とは必ずしも同値ではない）

［5］ 必要条件，十分条件

条件 p，q について，命題 $p \Rightarrow q$ の真偽を調べたら真であったとしよう．このとき，

p は（q であるための）十分条件，q は（p であるための）必要条件

とよぶ．$p \Rightarrow q$ が偽の場合については下を見よ．

プラスアルファ

［1］ 1° 「x が素数ならば x は奇数である」は $x=2$ を除いて正しいのですが，$p \Rightarrow q$ は，

すべて正しいときのみ真（1つでも間違いなら偽）

という約束なので上の命題は偽です．ビス1本でも欠陥があれば欠陥車というわけで，したがって，$p \Rightarrow q$ が偽であることを示したいときは，

p を真に q を偽にする値を1つ提示すればよい

ということになります．

2° $p \Rightarrow q$ について，p をみたす値が1つもないときは，P は空集合になって必ず $\mathrm{P} \subseteqq \mathrm{Q}$ となるので，この命題は真になります．

つまり，仮定が偽ならその命題は真であって，たとえば「実数 x が $x^2<0$ をみたすならば $x>0$ である」というとんでもない主張であっても，真の命題です．

［2］ この言いかえは教科書にはありませんが，意外に有効で，p.12，p.13 の説明などで使います．

［4］ 対偶が元の命題と同値であることに着目した論法を「対偶法」といいます．詳しくは⇨p.13

［5］ 2つの命題

$p \Rightarrow q$，$q \Rightarrow p$

の真偽の組み合せは右の4通りが考えられますが，p を主語にすると，

	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow p$
(1)	真	真
(2)	真	偽
(3)	偽	真
(4)	偽	偽

(1) p は（q であるための）必要十分条件である
（必要十分条件をたんに条件ということもある）
(2) p は十分条件であるが，必要条件ではない
(3) p は必要条件であるが，十分条件ではない
(4) p は必要条件でも十分条件でもない

となります．（q が主語だと(2)と(3)がひっくり返る）

なお，上のように2つの真偽を調べてから(1)〜(4)のように表現するとは限らず，上の［5］のように，$p \Rightarrow q$ の真偽を調べただけの段階で p，q の必要・十分の一面性だけを表現することのほうが多いくらいです．

［集合の包含記号について］

本書では「⊆」と「⊂」を使い分けていますが，現行の教科書では，これらは「⊂」に一本化されています．つまり，現行の「$\mathrm{P} \subset \mathrm{Q}$」は $\mathrm{P}=\mathrm{Q}$ の場合も含んでいることになります（本書では $\mathrm{P}=\mathrm{Q}$ を除く）．

3 オールとサム

［1］ オールとサム

2個以上あるものについてのなんらかの主張は，ほとんどの場合，

1° そのすべてについての話．

2° そのどれか少なくとも1つについての話．

のどちらかである．たとえば，「n が奇数ならば n^2 は奇数である」という命題は，「n がどのような奇数であっても……」の意味で，1°のほうである．日本語では，‘すべて’を意味する言葉を省略してしまうことが多い．

［2］ 任意，適当

数学の問題や解説で，よく「任意」,「適当」の単語が現れる．たとえば，

(1) 任意の奇数 n について，n^2 は奇数である．

(2) 適当な素数 n について，n^2 は偶数である．

というように，こういう表現に出会ってわかりにくいときは，

(1) ［任意 ⇨ すべて と言いかえて］ すべての奇数 n について，n^2 は奇数である．（真）

(2) ［適当 ⇨ ある と言いかえて］ ある素数 n について，n^2 は偶数である．（真）

と言いかえるのがよい．つまり，任意はオール，適当はサムを意味するわけである．

［3］ 任意，適当の否定

上の命題(1)は真である．というのは反例（n が奇数で n^2 が偶数である例）がないからである．したがって，(1)の否定命題は，反例があることを意味する主張，すなわち

ある奇数 n について，n^2 は偶数である（$\Longleftrightarrow$ **適当な**奇数 n について，n^2 は奇数でない）

となる．このように，一般に，

「任意の x について，p である」の否定は「適当な x について，p でない」

で，「である」を「でない」に変えるだけでなく，「任意と適当の入れかえ」も必要である．

プラスアルファ

［1］ x の条件 p は，一般に x によって真になったり偽になったりしますが，

すべての x について p である．

少なくとも1つの x について p である．

というように，x にオールかサムをつけ加えると必ず真偽が確定して，命題になります．

［2］ 機械的に，任意⇨すべて，適当⇨ある と変えてほとんどの場合は理解しやすい表現になりますが，上の(1)を例にして，

どんな奇数 n についても，n^2 は奇数である．……①

n が奇数のとき**つねに**，n^2 は奇数である．………②

としたほうが日本語としてしっくりして，より分かりやすくなることもあります．また，(2)は

素数 n で，n^2 が偶数であるものが**存在する**．……③

素数 n を**上手に選べば**，n^2 は偶数になる． ……④

と表現するのもよいでしょう．ちなみに筆者は①と③を愛用しています．

ところで，変数が2つになると，任意と適当が同時に現れる命題も考えられます．たとえば，

(3) 適当に x の値を定めると，任意の y の値について $x+y>0$ となるようにできる．

(4) 任意の y の値に対して，適当に x の値を定めることによって $x+y>0$ となるようにできる．

この2つは全く同じ意味のように思えますが，実は微妙な違いがあって，(3)は偽，(4)は真の命題です．

(3)の「適当，任意」の順序だと，

はじめに適当な値 x を固定しなければならない

のですが，(4)のように「任意，適当」の順序だと

任意の値をとって変化する y の値に応じて，

適当な値 x を変化させてよい

という約束事があるのです．したがって，(3)の場合，x をどんな値 a に固定しても，$y=-a-1$ のときは不適で偽．一方(4)は，どんな y の値 a についても，$x=-a+1$ と決めれば $x+y>0$ となるので真です．

§1 問題演習

A は基本的な点検問題
B は点検プラスアルファ問題

[A1] 「$x^2=|x|$ である」という条件をPとし，「$x=|x|$ または $x^2<x$ である」という条件をQとする．

このとき，条件「$\overline{\mathrm{P}}$ かつ $\overline{\mathrm{Q}}$ である」が真となる実数 x の範囲を求めよ．　(小樽商大)

[A2] 命題「積が奇数になる2つの整数は，少なくとも一方は奇数である」の対偶を次の(イ)〜(ハ)から選べ．

(イ) 積が偶数になる2つの数は，少なくとも一方が偶数である．

(ロ) 積が偶数になる2つの数は，ともに偶数である．

(ハ) 2つの偶数の積は偶数である．　(国士舘大)

[A3] 次の a についての条件が真となるような a の値の範囲をそれぞれ求めよ．

(1) 任意の正の数 x について $a+x\geqq 0$ である．

(2) ある正の数 x について $a-x>0$ である．

(東大)

[A4] 実数の有限集合X，Yについて，
「Xの任意の要素がYの任意の要素より大である」
ことを「X≫Y」と書くことにする．

実数の有限集合A，B，C，Dについて，A≫B かつ C≫D のとき，「C≫B でないならば，A≫D である」ことを証明せよ．　(立教大)

[A5] つぎの $\boxed{}$ に，必要条件であるかどうか，さらに十分条件であるかどうかについて記入せよ．

(1) $\dfrac{1}{a}<1$ であることは $a>1$ であるための $\boxed{}$

(2) $xy>0$ のとき，

$y>\dfrac{1}{x}$ であることは $x>\dfrac{1}{y}$ であるための $\boxed{}$

(立教大)

[A6] (1) $|x|<a$ は $x^2-x-2<0$ であるための十分条件であるという，a はどのような範囲の定数か．ただし，$a>0$ とする．

(2) $y\geqq x+b$ は $x^2+y^2\leqq 1$ であるための必要条件であるという．b はどのような範囲の定数か．

(奈良産大)

[B1] 「整数 n が6の倍数でありかつ8の倍数であれば，n は48の倍数である」の否定命題を述べ，その否定命題の真偽を判定せよ．　(信州大)

[B2] 3つの条件，p：$|x|+|y|<1$，
q：$|x|<1$ かつ $|y|<1$，r：$|x+y|<1$
がある．次の各 $\boxed{}$ に「必要であるが十分ではない」というような文章を記入せよ．

(1) p は q であるために $\boxed{}$

(2) $\overline{p}$ は「$\overline{q}$ または $\overline{r}$」であるために $\boxed{}$

(慶應大)

[B3] xy 平面上の点の集合 $\{(x,\ y)\,|\,x^2\leqq y^2\}$ をSとするとき，次の命題(1)〜(4)が成立するか否か調べよ．

(1) x が何であっても，その x に対して y を選べば点 $(x,\ y)$ はSに含まれる．

(2) ある x を選べば，y が何であっても点 $(x,\ y)$ はSに含まれる．

(3) y が何であっても，その y に対して x を選べば点 $(x,\ y)$ はSに含まれる．

(4) ある y を選べば，x が何であっても点 $(x,\ y)$ はSに含まれる．　(上智大)

[B4] a，b，c を実数として，実数 x，y に対して，

$$x◎y=ax+by+c$$

と定めるとき，次の各命題の真偽を述べよ．

(1) 「適当な実数 y をとれば，任意の x に対して $x◎y=x$ となる」が成り立つための必要十分条件は $a=1$，$b\neq 0$ である．

(2) どのような実数 x に対しても，「$x◎y=x$ となる実数 y（x ごとに異なってもよい）が存在する」ための必要十分条件は $b\neq 0$ である．　(立命館大)

[B5] $0<a<1$ を満たすどのような a に対しても，

$$\left.\begin{array}{l}「|4x-1|\leqq a \text{ かつ } |4y-1|\leqq a」\text{ ならば}\\ 「|x-y|\leqq b \text{ かつ } |x+y|\leqq b」\text{ である}\end{array}\right\}\quad (*)$$

が真となるための b の必要十分条件を求めよ．

(神戸学院大)

解答と解説

[**A1**] とりあえずはP, Qを整理してから, $\overline{\mathrm{P}}$, $\overline{\mathrm{Q}}$ を具体化するのがよいでしょう.

解　まず, $\mathrm{P} \iff x^2=|x| \iff |x|^2=|x|$

$\iff |x|=0$ or 1

$\iff x=0$ or 1 or -1

により, $\overline{\mathrm{P}} \iff x\neq0$ かつ $x\neq1$ かつ $x\neq-1$

また, $\mathrm{Q} \iff x=|x|$ or $x^2<x$

$\iff x\geqq0$ or $0<x<1$

$\iff x\geqq0$

により, $\overline{\mathrm{Q}} \iff x<0$

よって, $\overline{\mathrm{P}}$ かつ $\overline{\mathrm{Q}} \iff$ **$x<0$ かつ $x\neq-1$**

≪解説≫　はじめから $\overline{\mathrm{Q}}$ を相手にすると

$\overline{\mathrm{Q}} \iff x\neq|x|$ かつ $x^2\geqq x$

$\iff x<0$ かつ「$x\geqq1$ or $x\leqq0$」

あとは数直線で考えれば, これは $x<0$ と同値であることは簡単にわかりますが,

A∧(B∨C) ⟺ (A∧B)∨(A∧C)

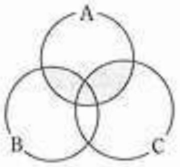
に着目するのもよいでしょう. なお, この同値性は,

A∩(B∪C)=(A∩B)∪(A∩C)

に対応するもので, この集合の等式が成り立つことは, 右図のように

ベン図

で確認することができます.



[**A2**] 人間は動物である, という命題は,

x が人間ならば, x は動物である

と, $p\Rightarrow q$ の形に表現しなおすことができます.

解　題意の命題は,

xy が奇数ならば, x, y の少なくとも一方は奇数である

であり, この対偶は,

x, y がともに偶数ならば xy は偶数である

である. よって, 答えは(ハ)

≪解説≫　上では, x, y が整数であることは大前提にしました. 大前提にしないで, 命題に組みこむと

xy が奇数かつ x, y が整数ならば,

x, y の少なくとも一方は奇数である

となり, この対偶は,

x, y がともに奇数でない(偶数 or 非整数)

ならば, 「xy は偶数 or 非整数」or「x, y の少なくとも一方は非整数である」

という煩雑なものになってしまいます. こんな言いかえをしても, なんのありがたみもありません.

対偶をとるときは, まずは大前提を定めることから始めないといけませんが, たとえば整数の話題なら, 暗黙のうちに整数を大前提にしてよいでしょう.

[**A3**] 一気には考えにくいなら, a に具体的な値をいろいろと代入して調べるところで, その結果, a の符号が浮かびあがってくるでしょう.

解　(1)　$a\geqq0$ だともちろんO.K.で,

$a<0$ だとたとえば $x=-\dfrac{a}{2}$ (>0) の場合がダメ

であるから, 答えは **$a\geqq0$**

(2)　$a\leqq0$ だともちろんダメ,

$a>0$ だとたとえば $x=\dfrac{a}{2}$ (>0) がO.K.

であるから, 答えは **$a>0$**

≪解説≫　(1)は直線 $y=x+a$, (2)は直線 $y=-x+a$ で考えるのもよいでしょう. すると(1)は,

$x>0$ の範囲では直線が x 軸の上側にある

という条件であり, (2)は,

$x>0$ のどこかで直線が x 軸の上側にある

という条件で, そのようになるには y 切片 a がどうであればよいかという問題に言いかえられます.

また, (1)は,

$x>0$ ならば $a+x\geqq0$ である

と表現できることに着目すれば,

$x>0$ の範囲が $x\geqq-a$ の範囲に含まれる

ことが条件で, $-a\leqq0$　∴　$a\geqq0$ が答えです.

一方, (2)は,

$x<a$ をみたす正の数 x が存在する

($\iff 0<x<a$ をみたす x が存在する)

と表現しなおすと, 一気に $a>0$ が得られるでしょう.

なお, (1)(2)の否定は,

$\overline{(1)}$　ある正の数 x について $a+x<0$ である

$\overline{(2)}$　任意の正の数 x について $a-x\leqq0$ である

となるので, たとえば'任意'は嫌いだけど'ある'は好きだという人は, (1)ではとりあえず $\overline{(1)}$ の結論を出して, その否定を答えるのがよいでしょう.

[**A4**] 実数の有限集合(要素が有限個である集合)には, 最大の要素も最小の要素も存在します. それらを設定すれば, 本問は軽い不等式の問題に帰着されます.

解　Aの最小の要素を a, 最大の要素を a' というように定めることにすると, 前提条件 A≫B かつ C≫D は

$a>b'$ かつ $c>d'$ ……………………………①

また，証明すべき「C≫B でないならば A≫D」は

$c>b'$ でないならば $a>d'$

すなわち　$c \leqq b'$ ならば $a>d'$

となる．そこで，①と $c \leqq b'$ から，$a>d'$ が導かれることを示せばよいが，①と $c \leqq b'$ をまとめると，

$a>b' \geqq c>d'$

であるから，確かに $a>d'$ が成り立つ．

≪解説≫　C≫B すなわち

C の任意の要素は B の任意の要素より大

の否定は，

C の任意の要素は B の任意の要素以下である

(⟺ B の任意の要素は C の任意の要素以上)

ではありません．p.6 の[3]で述べたように，否定では'任意'が'ある'に化けるからです．というわけで，C≫B の否定は B≫C ではありません．(否定が B≫C なら，前提は A≫B≫C≫D となり，A≫D は自明になってしまう)

[A5] $p \Rightarrow q$ の真偽を調べるのに，次の 2 つの方法があります．

その 1.（ごく素直に）p から q を導くことができるかどうか考える．導くのが困難なら，適当なところであきらめて，反例を見つける方向にいく．

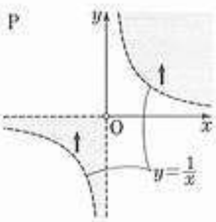
その 2. p，q の真理集合 P，Q の関係を考える．P⊆Q なら真である．とくに，p，q が 2 変数からなる条件の場合，P，Q を座標平面上の領域として表現すれば関係がわかりやすい．

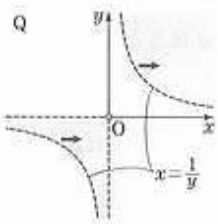
解　(1)「$\dfrac{1}{a}<1 \Longrightarrow a>1$」は $a=-1$ の反例があるから偽である．逆に $a>1$ のとき，両辺を a (>0) で割ることにより $1>\dfrac{1}{a}$ がいえる．したがって，

必要条件であるが，十分条件ではない

(2)　$xy>0$ は座標平面では第 1，第 3 象限を意味する．この範囲で，

P : $y>\dfrac{1}{x}$，Q : $x>\dfrac{1}{y}$　を図示すると，





よって，**必要十分条件** である．

≪解説≫　(2)を(1)のように解くと；

$xy>0 \Longleftrightarrow$「$x>0$，$y>0$」or「$x<0$，$y<0$」である．

1° $x>0$，$y>0$ の場合．

$$y>\frac{1}{x} \Longleftrightarrow xy>1 \Longleftrightarrow x>\frac{1}{y}$$

2° $x<0$，$y<0$ の場合．

$$y>\frac{1}{x} \Longleftrightarrow xy<1 \Longleftrightarrow x>\frac{1}{y}$$

よって，必要十分条件である．

⇨注　上で，「$x>0$ かつ $y>0$」と書くべきところを「$x>0$，$y>0$」と表現しました．このように，

「かつ」を「，」で略記する

ことはなんとなく習慣になっています．

[A6] 不等式には範囲がつきもので，範囲（集合）が数直線や座標平面の単純な領域を意味するときは，命題の真偽を領域の包含関係にもちこむ手法が有効です．

解　(1)　$|x|<a \Longleftrightarrow -a<x<a$ ……………①

$x^2-x-2=(x-2)(x+1)<0$

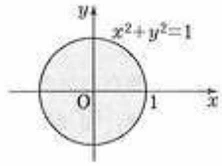
$\Longleftrightarrow -1<x<2$ ……………②

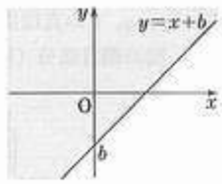
で，①の範囲が②の範囲に含まれるような a の範囲を求めればよい．それは，

$-1 \leqq -a$ かつ $a \leqq 2$　∴ $(0<)\boldsymbol{a \leqq 1}$

(2)　領域 $x^2+y^2 \leqq 1$ が領域 $y \geqq x+b$ に含まれるような b の範囲を求めればよい．

この 2 つの領域は右図の網目部分のようになる．





円 $x^2+y^2=1$ と直線 $y=x+b$ が第 4 象限で接するときの y 切片 b の値は $-\sqrt{2}$ で，b がこの値以下であることが，上の――の条件である．

したがって答えは，

$\boldsymbol{b \leqq -\sqrt{2}}$

⇨注　(1)で $a>0$ の前提がなければ，

$a \leqq 0$ のとき $|x|<a$ の真理集合は空集合

となって，「①の範囲⊆②の範囲」に適するので答えは $a \leqq 1$ となります．