はじめに

衝撃的だった．高校２年の４月，サッカー部をやめて暇をもてあまし，ぶらぶらしていた私は，書店である１冊の問題集を手に取った．目に映った問題文はその意味すらわからなかった．解答に並ぶ言葉は私には暗号だった．ページをめくった．次のページも，次のページも，どこにも，私に理解可能な問題は現れなかった．人並み程度には数学ができたにもかかわらず，解くことはおろか，１題も理解できない問題集があることに驚き，呆然とレジに並んだ．それから１か月，私はその問題集の解読に明け暮れた．これが受験雑誌「大学への数学」と私の出会いである．

その数日前，私は亀井勝一郎の「大和古寺風物誌」で「邂逅（かいこう）」という言葉を初めて読んでいた．その後の人生に大きな影響を与える出会い，邂逅というべきものが，何度かあると書いている．ほう，そんなことがあるのか．それはまもなく訪れる出会いのプロローグであった．

ときはうつり 31 才の冬，予備校講師となった私は毎週，札幌，東京，名古屋に出講していた．２月のある日，札幌で村上君という生徒が私のところに来て言った．

「先生は恩人です．高校のとき，勉強しても成績が上がらず最下位に近く，何度も高校をやめようと思いました．ある日図書館で友達が問題集をやっていた．それ何？これは安田という人の書いた問題集だ．それをやりだして勉強がおもしろくなりました．大学に落ちたとき，やった，これで安田先生に習える！北大の医学部を受験できるようになったのも先生のおかげです．」

驚いた．その問題集は，私がこの業界で偉くなりたいと，自分のために書いたものだった．それが遠い所で，見知らぬ人の役に立っている．

私をあれほどまでに勉強に駆り立てたもの，村上君を熱中させたもの，それは何だったのだろう．今は劣等生だけれど，もしできうることなら持てる能力のかぎりがんばってみたいという思いが誰にもあって，そんな受験生と，こんな本を世に出したい伝えたいことがあるのだという書き手の，魂が触れあった．上記の問題集「新作問題演習 No.1」「安田亨の微分積分」は既に廃刊である．本書が新たな出会いとなることを願って．

（やすだ　とおる）

目 次

【本書の利用法】

◆ 対象

場合の数・確率を苦手にしている人は多い．そんな人が，苦手を得意分野に変身させるためのものが本書です．この本の対象は次のような人です．

学校で一応学んでいるが，いまいちピンとこない現在高校生の人や受験生．

昔，学校で学んだが，現在は社会人・大学生で再受験をめざす人．

◆ 本書の書き方の基本姿勢

私が受けた数学のテストで最低点は 34 点，高校 1 年のときの場合の数のものです．怠けたからではありません．有名な参考書を 3 回まわりやってもよくわからなかったのです．その私が，兄のアドヴァイスをきっかけにコツをつかんだのです．学校の授業や参考書には，${}_n\mathrm{C}_r$ や ${}_n\mathrm{P}_r$ を使って答えが出せるものを主に扱っていました．そのため，私は「${}_n\mathrm{C}_r$ や ${}_n\mathrm{P}_r$ を使えば答えが出る，その使い方が重要だ」と誤解していたのです．兄はこのことを指摘しました．標準以上の問題では，

題意は結局どういうことなのかを解析する

問題ごとに基準を設けて，数えやすい形に分類する

計算する

という手順をとりますが，${}_n\mathrm{C}_r$ や ${}_n\mathrm{P}_r$ は最後の計算で使うこともあれば，使う必要のないこともあります．題意の解析のしかた，どの点に着目し，どう分類していくか，その考え方が重要ですが，残念ながら，学校や参考書でその点を教えてもらった記憶がありません．先生方は教えていたけれど，私が未熟で理解できなかっただけかもしれませんが，本書では，その考え方をできうる限り伝えたいと思っています．

本書では，いくつかの冗談が書いてあります．それは冗談のための冗談ではありません．理解を助けるため，視点を切り替えるためのものです．勉強を始めた頃の私は，問題文を読んでも，それがどうしたの？ピンとこないことが多々ありました．ところが，感情移入し，おもしろくとらえることが理解の手助けになりました．擬人化することが，ときにはあざやかな解法の発見につながったのです．そうか！ぼやけていた場合の数・確率が，パッと明らかになっていった，私自身の奮闘努力の結晶が，本書なのです．

◆ **読み方と勉強法について：**

1 **レベルに応じた読み方をする．**

基礎力だけをつけたい人は，第一部，第二部だけで十分です．第三部は無視するか問題と解答を，流し読みでよいからどんどん読んでください． 流し読みとは，解答の細部を確認しないで，全体を読むのです．ハイレベルの問題にはアイデアの輝きがあります．その輝きに触れることで，無意識のうちに，種が畑に舞い降り，やがて，芽吹く．

2 **自分の勉強法を確立せよ．**

勉強のしかたは人によっていろいろです．自分の方法が確立している人は自由に読んでください．どんどん解答を読むもよし，まず鉛筆をもって解くもよし．ただし，自分の勉強のしかたが確立していない人の参考のために，私の勉強法を書きます．

（1） 例題の前に基本公式の解説をしている部分があるので，その部分も読んで，自分で証明できるようにする．

（2） 例題を読んで，自分で問題を解いてみる． 15 分くらい考え，解けなかったり，解けても解法が下手であったり，ただ計算式を並べただけで日本語がうまく書けないなら，本書の解答を熟読し，見ないで，**解答を再現する．**

（3） あせらない． 1 回で理解しようとしない．よくわからないことが出てきたとき，ある程度考えても理解しがたい点，ピンとこない点が出てきたら印をつけとばして先にいく．頭の中の貯蔵所に入れておく．発酵・熟成が進むとわかるときがきます．

解説は，普通の解法とうまい解法を並べている部分があります．

正攻法の修得と発想の幅を広げることが学習の目的

ですから，どちらの考え方も学んでください．うまい解法だけを求めるのは間違いです．しかし，正攻法だけに価値があるとするのも偏狭です．巧みな発想を知り，数学の自由な世界に飛翔することは，明日の学習意欲をかきたてるエネルギー源となります．

◆ **繰り返す**

学習の基本は 1 冊を何度も繰り返し知識を定着させることです．私はどんな分野も修得するのに 3 回繰り返しました．

§2 確率の乗法定理

事象A, Bがあり, AとBがともに起きる確率 $P(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})$ は

（ア） AとBが独立のとき

$$P(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})=P(\mathrm{A})\cdot P(\mathrm{B}) \cdots\cdots ①$$

である. 「独立」の定義については p.220 で説明します. 今は「関係がない」くらいにとらえてください. たとえば, サイコロを振ってコインを投げるときサイコロの目と, コインの表・裏には通常はなんの関係もありません. このように「関係ないぞ」というのが独立です. しかし, 独立かどうか微妙なものもあります. そのときは次で考えます.

（イ） AとBが独立ではないとき,

$$P(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})=P(\mathrm{A})\cdot P_{\mathrm{A}}(\mathrm{B}) \cdots\cdots ②$$

である. ここで, $P_{\mathrm{A}}(\mathrm{B})$ とは, A が起きたという条件のもとで B が起きる確率である.

② は厳密には数 C の範囲と考えられています. しかし, 数 A の教科書の中には ② を明示しないで実質的に ② を用いているものがあり, 現行の教科書の範囲の分類自体が適切ではありません. 数 A しか必要がない人も ② を学習しておくほうが理解しやすいはずです.

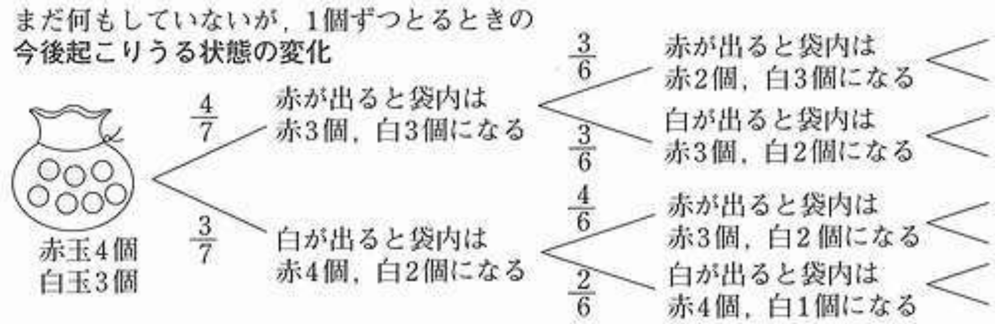
さて, $P_{\mathrm{A}}(\mathrm{B})$ の

Aが起きたという条件のもとでBが起きる確率

とは, なんでしょう？この表現に違和感がない人は, 優秀です. 高校時代の私にはこの表現があまりすっきりしませんでした. 「何を言っているのかわからない, 普通の言葉で言って欲しい」と思いました. 次のように言えば多少わかりやすいでしょうか？

この確率 $P(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})$ は, **まだ何もしていない時点での確率**です.

これからやろうと思う, そのとき A が起きることもあるし, 起きないこともあるが, **A が起きたという状態を仮定して, その後のことだけを考え, B が起きる確率を** $P_{\mathrm{A}}(\mathrm{B})$ と表すのです.



たとえば，赤玉 4 個，白玉 3 個の入った袋から順に 1 つずつ玉を取りだしていくことを考えましょう．しつこいですが，まだ何もしていないのです．

もし，1 個目に赤玉が出たとするならば，袋の中が赤玉 3 個と白玉 3 個になるので，その状態が起きたと仮定すれば，そこから 1 個を取りだすときそれが赤玉である確率は $\dfrac{3}{6}$，それが白玉である確率は $\dfrac{3}{6}$ です．

もし，1 個目に白玉が出たとするならば，袋の中が赤玉 4 個と白玉 2 個になるので，その状態が起きたと仮定すれば，そこから 1 個を取りだすときそれが赤玉である確率は $\dfrac{4}{6}$，それが白玉である確率は $\dfrac{2}{6}$ です．

たとえば，

事象 A ：1 個目に赤玉を取り出す

事象 B ：2 個目に白玉を取り出す

とすれば，

$P(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})=$(1 個目に赤玉を 2 個目に白玉を取り出す確率)

$=$(1 個目に赤玉を取り出す確率)×(1 個目に赤玉を取り出したという状態を仮定したときに 2 個目に白玉を取り出す確率)

$=P(\mathrm{A})\cdot P_{\mathrm{A}}(\mathrm{B})$

$=\dfrac{4}{7}\cdot\dfrac{3}{6}$

とするわけです．

そして「このくらいなら乗法定理というほどのものじゃない．数 A の範囲にしてもよかろう」という出題者がいて，出題の境界がはっきりしないのが現状です．

例題 27．Aの箱には赤玉3個，白玉2個が，Bの箱には赤玉，白玉がそれぞれ2個ずつ入っている．

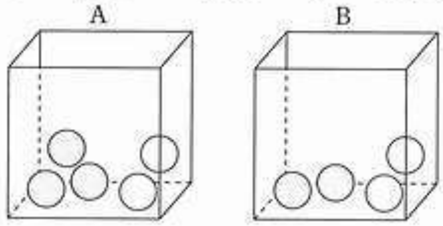
（1） Aの箱から2個の玉を取り出すとき，それが2個とも赤玉である確率を求めよ．

（2） Aの箱から玉を1個取り出し，それをBの箱に入れた後，Bの箱から玉を1個取り出すとき，それが赤玉である確率を求めよ．

（3） Aの箱から玉を2個を取り出し，それをBの箱に入れた後，Bの箱から玉を2個取り出すとき，それが2個とも赤玉である確率を求めよ．

(兵庫医大)

もちろん，これらの玉はすべて異なるとして考えます．さらに（1），（2），（3）は独立した設問ですから勝手にくっつけて考えないでください．



解 （1） 2個の組み合わせは全部で ${}_5C_2=\dfrac{5\cdot4}{2\cdot1}=10$ 通りあります．このうち赤玉を2個取る組み合わせは ${}_3C_2=\dfrac{3\cdot2}{2\cdot1}=3$ 通りあるから，求める確率は　$\dfrac{{}_3C_2}{{}_5C_2}=\boldsymbol{\dfrac{3}{10}}$

（2） Aの箱から玉を1個取り出すとき，赤玉を取るか白玉を取るかで場合を分けて考え，次の2つの場合があります．

（ア） Aの箱から赤玉を1個取りだし$\left(\text{その確率は }\dfrac{3}{5}\text{，以下すべて括弧の中の分数はそれが起こる確率を表す}\right)$それをBの中に入れて，Bの箱の中が赤玉3個，白玉2個になり，そこから赤玉1個を取り出す$\left(\dfrac{3}{5}\right)$とき．

（イ） Aの箱から白玉を1個取り出し$\left(\dfrac{2}{5}\right)$それをBの中に入れてBの箱

の中が赤玉2個，白玉3個になり，そこから赤玉1個を取り出す $\left(\frac{2}{5}\right)$ とき．

求める確率は　$\frac{3}{5}\cdot\frac{3}{5}+\frac{2}{5}\cdot\frac{2}{5}=\mathbf{\frac{13}{25}}$

ここで少し解説をします．（ア）になる確率を $\frac{3}{5}\cdot\frac{3}{5}$ と計算していますが，乗法定理を用いています．

また，（ア）と（イ）は排反ですから，（ア）になる確率と（イ）になる確率を単純に加えればよいのです．**排反**というのは**「同時にはおきない」**ということです．Aから玉を1個取るとき，「赤玉1個取る」ということと「白玉1個取る」ということが同時に起きるわけがありません．

（**3**）　Aの箱から玉を2個を取り出すとき，それが赤玉2個なのか，赤玉1個と白玉1個なのか，白玉2個なのかで場合分けし，次の3つの場合がある．

（ア）　Aの箱から赤玉を2個を取り出し $\left(\frac{{}_3C_2}{{}_5C_2}=\frac{3}{10}\right)$ それをBの中に入れてBの箱の中が赤玉4個，白玉2個になり，そこから赤玉2個を取り出す $\left(\frac{{}_4C_2}{{}_6C_2}=\frac{6}{15}=\frac{2}{5}\right)$ とき．

（イ）　Aの箱から赤玉1個と白玉1個を取り出し $\left(\frac{3\cdot2}{{}_5C_2}=\frac{3}{5}\right)$，それをBの中に入れてBの箱の中が赤玉3個，白玉3個になり，そこから赤玉2個を取り出す $\left(\frac{{}_3C_2}{{}_6C_2}=\frac{3}{15}=\frac{1}{5}\right)$ とき．

（ウ）　Aの箱から白玉を2個を取り出し $\left(\frac{{}_2C_2}{{}_5C_2}=\frac{1}{10}\right)$，それをBの中に入れてBの箱の中が赤玉2個，白玉4個になり，そこから赤玉2個を取り出す $\left(\frac{{}_2C_2}{{}_6C_2}=\frac{1}{15}\right)$ とき．

求める確率は

$$\frac{3}{10}\cdot\frac{2}{5}+\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{5}+\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{15}=\frac{18+18+1}{150}=\mathbf{\frac{37}{150}}$$