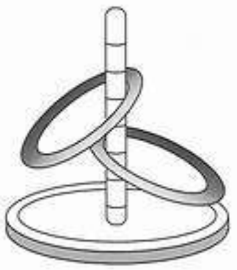
# はじめに

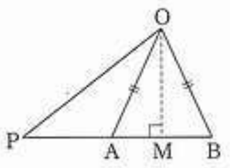


黒木 正憲

中高一貫教育でない中学の数学は，義務教育の最終段階の数学として，数学としては初歩の知識が，いわば雑多に並べられているのですが中高一貫教育の数学となると，高校で学ぶ数学の課程から中学での数学が見直されることになります．すると，中学の課程で扱っていた項目のいくつかは整理して，それを高校でのもっと一般的理論に吸収するとか，また，中学で扱っている項目のいくつかは，高校のそれに関する課程の数学がよく理解されるように，もっとていねいに準備していく，というなこともおきるでしょう．また，中学課程においても，これまでの個別の問題が，ある定理の系列へ組みこまれ，問題の理解が容易になるように再編されるということもおこりましょう．

たとえば，本書でも扱われている問題ですが

「OA＝OB である 2 等辺 3 角形 OAB の
辺 AB の延長上の 1 点を P とすれば，
$PA\times PB=PO^2-OA^2$ がなりたつ」




これは，ふつう，三平方の定理を用いて，つぎのように証明されます．

O から AB へ下した垂線の足を M とすると，M は AB の中線となるから，

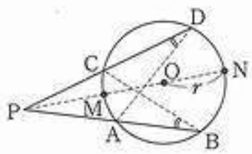
$$\begin{aligned}
PO^2-OA^2&=PM^2+OM^2-(AM^2+OM^2)\\
&=PM^2-AM^2=(PM-AM)(PM+AM)\\
&=(PM-AM)(PM+BM)\\
&=PA\times PB
\end{aligned}$$

ところで，この問題は，つぎの円についての性質から自明のことなのです．

右の図において，

$\triangle PAD \backsim \triangle PCB$

ですから，




$$\frac{PA}{PC}=\frac{PD}{PB}$$

すなわち，$PA\times PB=PC\times PD$

がなりたちます．P を通る円 O の直径が MN のとき，その半径の長さを $r$ とすれば，

$$\begin{aligned}
PA\times PB&=PM\times PN\\
&=(PO-MO)(PO+ON)\\
&=(PO-r)(PO+r)=PO^2-r^2
\end{aligned}$$

がなりたちます．さきの図において，O を中心とし，OA を直径とする円は B を通りますから上の円の性質が分かっていれば，さきの問題は 3 平方の定理を持ちだすまでもなく，自明のことになりましょう．

（点 P が辺 AB 上の点のときは，やはり相似 3 角形の辺の比から，

$PA\times PB=-(PO^2-r^2)$ がえられます）

このように，この書では，これまでとかく雑多であった中学の図形の問題が，中高一貫教育にふさわしく，すっきりと再編成されて，一段と学習効果をあげることが企図されています．

数学 10 代，物理 20 代，化学 30 代といわれるように，数学は，中学，高校生の時代に適切な学習を行えば，恐ろしく知識が伸びる学科です．

中学生の皆さんは，この中高一貫教育のための第 1 陣として刊行される本書を通じて，まず図形の問題に対し，それらを解決するセンスをしっかり身につけてください．

# 本書の利用法

栗田 哲也

## ◆ 本書の特徴と読者対象

本書は，中高一貫校に在籍する中学生のみなさんが，将来の大学受験を念頭において数学(図形分野)を学習する場合，中学時代には何をやっておけばよいかということを追求した本です．

一般に，高校受験の参考書は世に多いのですが，それらの参考書や問題集は高校入試の問題から構成されており，不必要に細かい枝葉をたくさん含んでいますから，高校受験のない一貫校のみなさんには不向きです．

それに対して本書では，

将来の大学受験に備えて，必要な
ポイントを1つ1つ積みあげていく

という方式をとっています．

このことによって，中学で学ぶ数学と高校で学ぶ数学を連続的にし，高校で学ぶ内容(たとえばベクトル)に，中学で学ぶ内容(たとえば初等幾何)が自然と生かせるように工夫したのが，本書の最大の特徴です．

## ◆ 本書のレベルと読み方

一貫校に在籍するみなさんは，中学受験を経験している人が大半ですので，教科書レベルのことであれば，半年ぐらいで中学2年生の終わり程度の力が身につきます．

本書は，

中学2年生の教科書程度(章末問題
の多くを自力で解ける段階)

のレベルに達した人(中1〜中3の人)が，

中1〜高校初期

の図形分野を，過不足なく一通り学ぶ，という構成になっています．すなわち，

① 予備チェック問題(p.6〜p.7)
を解いてもらうことによって，自分がこの本を読める実力に達しているかを自分でチェックするところからはじめ，

② §1〜§11 の各章で，中学範囲の図形について学習し，

③ §12〜§14 の各章で，高校で習う数学の諸分野のうち，三角比，座標幾何，ベクトルといった，図形と関係の深い3つの分野の紹介をします．

④ 終わりに証明問題の学習法をつけました．

②と③の一章分は

A 4ページの解説・(ポイント□が列挙してある)

B 2ページの練習問題と2ページの解答

の計8ページから成っていますが，この一章分を，はやい人は2週間ぐらい，おそい人は1か月ぐらいで読んでいき(問題は解いていき)，終わったら2〜3度，今度はスピードをはやめてくりかえしてください．

本書のように「基準となる問題をまとめた本」を学習する際には，何度くりかえして自分のものにするかが最大の鍵になります．

## ◆ 注意点

本書を一通りこなせば，これから高校課程(図形分野)に進んでいくうえで，必要な知識，技能は十分に備わります．

ここまでを効率よく身につけてもらうための参考書が本書なのです．ただし，本書は，

① いわゆる類題演習は省いてある

② 初等幾何の難問，有名定理はあまり入っていない

ので，類題演習をたくさんこなしたい人や，いわゆる「難問」に挑戦したい人は，本書を学んだあとで，さらに別の書物を学習するとよいでしょう．

なお，本書の趣旨については，p.4〜p.5 も参照して下さい．

# 目　次

# 図形分野の学習法

## ——中高一貫校生のみなさんへ——

### 1．はじめに

この本は，中高一貫の私立（国公立）中に在籍する人のための，図形分野の本だ．

なぜ，そんな本を作ったのか？

中1，中2の教科書を持っている人はあけてみてほしい．特に，図形分野のページをひらいて少し読んでみよう．

すると，今まで中学受験のために一生懸命学習してきたことで，ほとんど間に合ってしまっていることに気がつくはずだ．

ちょっと気になるのは，新しい用語が出てきて，それをおぼえなければならなかったり，中学2年生で，「証明」というやや目新しいことをやらねばならないことぐらいだ．

普通のカリキュラムに準拠しているかぎり，これは，「中高一貫校のみなさんは，中1，中2のうちは遊んでいていいよ」といっているようなものだ．

まあ人生いろいろだから，中1，2のうちは遊んでいてよいという考え方もあるだろう．相当に蓄積がある人は，2年ぐらい遊んでも，そのうちどこかで勉強せねばと思って，大学受験までには帳尻を合わせていく．

でも，その他大部分の人は遊びすぎてしまってあわてたり，逆に親の厳しい方針で中1から大学受験の塾に通いつめて燃えつきてしまったり，途中で不安になって高校受験用の（本来なら必要ない）参考書や問題集に手を出したり，要するに無駄なことばかりやっているうちに，いつのまにか時間だけ経っていく．

こんな無意味な事態になるのも，中高一貫生の目的とレベルに教科書がぴったりしていないためである．それでは，何か教科書に代わる中高一貫生用の書物はあるだろうか？

残念ながらない．参考書や問題集は，高校受験にシフトしてしまっていて，中高一貫生を主要な対象としていないのだ．ないなら，作ろう．

こうしてできたのが，この本だ．

### 2．本書に取りかかる前に

中高一貫の中学校に在籍するみなさんは，かなり厳しい受験をくぐりぬけてきている．

したがって，多分，この本を読む前提となるぐらいの知識はクリアしているはずだ．

でも，中には，「算数はとても苦手だった」という人もいるだろうし，この本を読めるレベルに自分が到達しているかどうか，不安な人もいるだろう．

そうした人は，この本に取りかかる前に，

① 中1，中2の教科書を持っている人はその図形分野を1通り読んでみよう．

特に，合同条件のところは念入りに読もう．

② p.6からの予備チェックをやってみよう．（この予備チェックがちんぷんかんぷんだと，本書はまだムリだ．）

### 3．本書の学習法

本書の主要部は，14章に分かれている．各章はそれぞれ，

ア．4ページの解説（要点の整理）

イ．15問ほどの問題とその解説

から成り立っている．

各章にとりかかるときは，まずアの部分をじっくり読んでポイントを理解してほしい．（どうしてもわからない箇所があるときは，学校の先生なり，塾の先生なり，信用できる人に聞いてクリアしておこう．）

ポイントすべて大丈夫となった時点で，はじめて問題にとりくむこと．

問題はわからなくとも1問最低10分は考えてほしいが，逆に30分も40分も考えるのは逆効果だ．

なぜなら，この参考書（兼問題集）には，そうした，重厚な思考を必要とする複合的な問題は入っていないからである.

むしろ，10 分以上手をこまねくようだったら解答をよく見て理解し，2回目にやるときに自力で解けるようになっておけばよい.

このようにして各章の問題を少なくとも3回くりかえし,

- 見たらすぐ解法が思い浮かぶ
- 問題のポイントを他人に説明できる

段階まで訓練することが必要である.

### 4. 本書で何が達成でき何が達成できないか

この本を上記のような方法でやり終えたとき達成されているのは,

> 中学分野の図形は1通り完成し，高校範囲の三角比，ベクトル，座標平面に進むだけの十分な素養が整備される.

ということだ.

逆にこの本には必要最低限の問題数しか入っていないし，幾何の本格的に難しい定理はあまり扱っていないので,

> 初等幾何の難問を解いてこの分野に精通したい人は，本書を足がかりに，さらに別の書物をやる必要がある.

また，一部の私立中の先生で，幾何の公理からはじめて，証明を書かせる作業をみっちりとさせるタイプの人がいるが，本書は,

> 公理的な考え方や，証明の訓練には重きをおいていないので，そうした目的にはあまり適さない.

公理的なものの考え方や，証明の書き方のくわしい説明は，厳密に書くとあまりに長く，本として読みづらいものになるので，本書では，幾何のそうした側面はかなり省いてある.

公理的な構成や，証明の書き方を深く学びたい人は，学校の授業などの授業形式で学ぶか，あるいは，少し難しいが，そうした所を中心に書いてある本格的な本で学んでほしい.

### 5. 「図形」が得意になるためには

本書は,

「基本的な形」に対する理解をし，「基本的な形」についての知識を，やや複雑な形の中で活かしてみよう，という方針で貫かれている.

(☞p.12)

したがって,

A. 定理や公式を簡単にあてはめるだけのドリル

B. 自力で 30 分以上かけてあれこれ考え，論理的な力をつけるための難問

は，意図的に省いてある.

このうち，A は学校で出されたプリントを学習したり，期末テストの勉強をしたりしているうちに，自然とこなしてしまっているものだ.

問題は B である.

本当の意味でのトップクラスをねらいたい諸君は，1題 30 分以上かかるような難問を自力で解ききる経験をかなりつまないと，真の実力はついてこない.

だから，実は君たちみなに，筆者はこうした難問を 4〜5 日に1題は解くことをすすめたい.

でも，多くの諸君は，そんなひまはないというだろう．数学の勉強以外に，クラブ活動もあり，テレビも見たいし遊びたい．あるいは，音楽に熱中している人だっているかもしれない.

だから B の段階の勉強をどうしてもやれとはいわない.

いいたいのはただ次のことだけ.

本書を何回もくりかえして学習してあれば，本物の実力をつけたいとき，いつでも B の段階の勉強に移行できますよ，ということ，逆にこうしたタイプの本を少なくとも一冊マスターしておかないと，いざというときに基礎に穴があったりして，たいていは意欲の空まわりを招きますよ，ということだ.

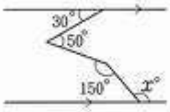
では，ここらで長い前書きは終わりにして，早速「予備チェック」にとりかかってもらおう.

# 予備チェック問題

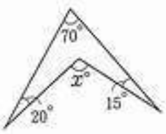
教科書などを1通り(中2まで)読んだあと，短時間でためしてみよう．なお＊印のついた問題は中3範囲の知識が必要なので，あとまわしでもよい．

**1**．次の各問で，角度$x$を求めよ．(6分)

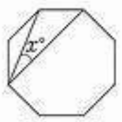
(1)




(2)

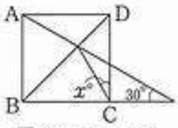



(3)



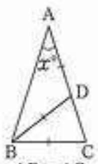

［正八角形］

(4)



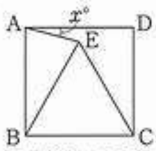

□ABCDは正方形

(5)




AB＝AC
AD＝BD＝BC

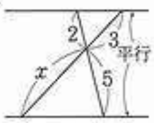
(6)



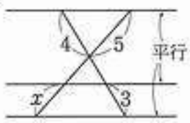

□ABCDは正方形
△EBCは正三角形

**2**．次の各問で，長さ$x$を暗算で求めよ．(5分)

(1)

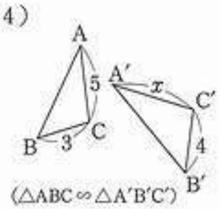



(2)




(3)


(4)

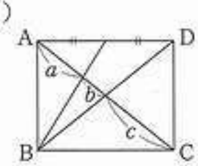



(△ABC∽△A′B′C′)

(5)

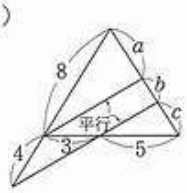

**3**．次の各問で，$a:b:c$の長さの比を求めよ．(2分)

(1)



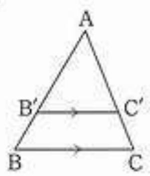

□ABCDは長方形

(2)

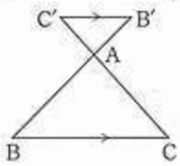



**4**．相似の有名なタイプに下の2つがある．(4分)

①

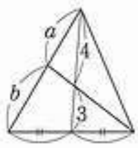



②



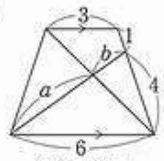

どちらも，△ABC∽△AB′C′である．下の各問で線を1本引くことによって，上の①や②の形を2つつくり出し，それらをくみあわせて問題を解け．

(1)




$a:b$を求めよ

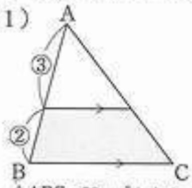
(2)




$a:b$を求めよ

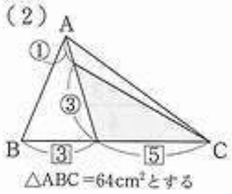
**5**. 次の各問で，網目部の面積を求めよ.（3分）

（1）



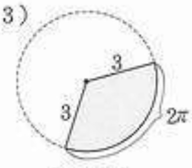

$\triangle ABC = 50\text{cm}^2$とする

（2）




$\triangle ABC = 64\text{cm}^2$とする

（3）




［おうぎ形］

**6**. 次の各問に答えよ.（ノータイム）

（1） 三角形の合同条件を3つ，直角三角形の合同条件を2つあげよ.

（2） 四角形が平行四辺形となるための条件を5つあげよ.

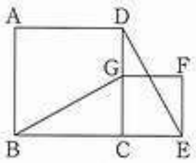
**7**. 次の各問に答えよ.（10分）

（1） AB＝ACの二等辺三角形で，AからBCに下した垂線，∠Aの二等分線，辺BCの垂直二等分線の3本は，一致することを示せ.

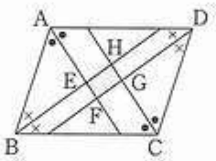
（2） 右図で□ABCD，□CEFGはともに正方形であるものとする．このとき，

BG＝DE　BG⊥DE

であることを証明せよ.




（3） 平行四辺形ABCDの各頂角の二等分線の交点を，右図のようにE，F，G，Hと定めるとき，四角形EFGHは長方形であることを証明せよ.




**8**. 半径5cmの円$C$と，半径$r(>0)$cmの円Dがある．次の問に答えよ.（2分）

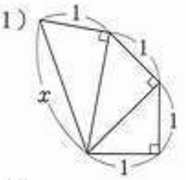
（1） 中心間の距離が8cmのとき2円は2点で交わるものとして，$r$の値の範囲を求めよ.

（2） 中心間の距離が2cmのとき，一方の円が，他方の円に内接するものとして，$r$の値を求めよ.

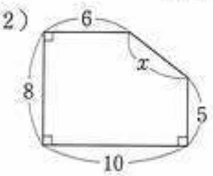
**9**＊ 次の各問で，長さ（面積）$x$を求めよ.

（2分）

（1）

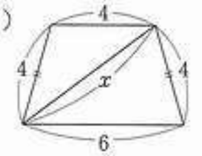



（2）



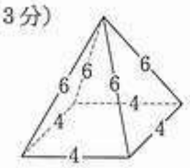

（3）


（4）

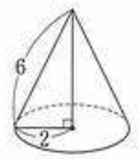



**10**＊ 次の各問に答えよ.（3分）

（1） 右の正四角錐の体積を求めよ.

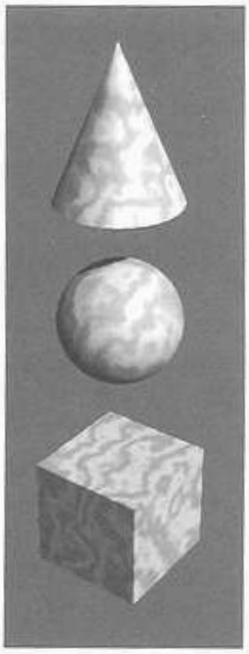



（2） 右の円錐の表面積を求めよ.



## 本書を学習するにあたって

これからはじまる14個の章は、1つ1つが解説4ページ、問題と解答4ページに分かれています。勉強の方針としては、解説編はゆっくり、じっくり時間をかけて、精読するとよいでしょう。問題編は一問10〜15分ぐらいは考えてから、解答を見(解けた場合でも、解答の方針は見た方がよい)、少なくとも同じ問題を［少し時間をあけて］3回はくりかえしてください。



# 1 角度・合同・相似

## 1. 基本構図を複雑な図に読みこめ！

図形を研究するにあたって最初にやることは，定理や公式をしっかりと理解し，論理の筋道をきっちりと追うことだ．

教科書の学習は，まさにこの段階にあたる．

では，次にやるべきことは何かというと，定理や公式を活用して，より複雑な構図の問題に挑んでいくことだが，この段階でどういう学習法を取るべきかわからずに沈没する人が多い．

そうした人におすすめしたいのが，タイトルにも書いた，

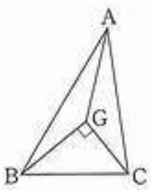
> 基本となる構図をマスターして，複雑な図形の中に，その構図を発見する

というシンプルな勉強法である．

例を挙げよう．

**例題**

右図でGは三角形ABCの重心であり，$\angle BGC=90^\circ$である．$BC=8$　のとき，AGの長さを求めよ．




この問題を初心者が解こうとすると，どこから手をつけてよいかわからずに立往生する場合が多い．BGの長さはいくつだろうとか，CGは，とか考えたりして，泥沼にはまっていく．

では，上級者はどうするか．

彼は，まず「重心」という言葉から，右段上に書くポイント1°～3°を連想する．

そしてポイントの2°より，図のGDがわかれば，それを2倍すればよいなと考えて，図をにらむ．そして次のように問題を解く．

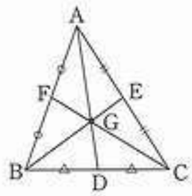
**《解法のあらすじ》**

**重心の基本構図**

1°　重心は三角形の3本の中線が交わる点である．

2°　AG : GD，BG : GE，CG : GF はすべて2 : 1

3°　分けられた6つの小三角形の面積はみな等しい．




頭の中にこのポイント2°を浮かべると，

⇩

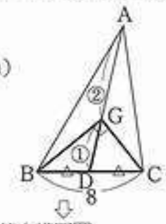
GDさえ求まればよい．（あとは2倍すればいいね）

⇩

ぐっと図をにらむと太線部分に基本構図⑭（☞p.14）が見える．そこで，GDはBCの半分の4．

⇩

あとは4を2倍して答えは8




⇩

基本構図⑭

［直角三角形の斜辺の中点から3頂点までの距離はみな等しい］

*　　　*　　　*

大切なのは，重心の構図と直角三角形の構図を，問題の図の中にうまく‘発見’することだ．

このように基本的な構図に習熟し，それをより複雑な図の中に発見していくことで，難しい問題もスイスイとパズルのように楽しく解けるようになる．でも‘基本構図’ってどの位あるの？という声がきこえてきそうだ．そこで

- 長年の経験から精選された‘基本構図’をまず君たちに沢山（全部で200位）紹介し，
- 次におぼえた基本構図を，より複雑な問題の中に自力で発見する訓練をしてもらおう．