はじめに

黒木正憲

ギリシャの昔，エレアのツェノンは，アテネを訪れて，4つの逆説を示し，当時の哲学者達を悩ませました．そのひとつに，「アキレス（註）は先を行く亀に追いつくことはできない」という命題があります．なぜなら，アキレスがいま亀がいる地点につくとき，それまでの時間にやはり亀は先行している．またアキレスがその地点につくとき，それまでの時間にやはり亀は先行している．かくして，アキレスは亀に追いつくことはない，というのです．

たとえば，アキレスがはじめ亀がいた地点につくのに1分かかり，つぎに$\frac{1}{2}$分，つぎに$\frac{1}{3}$分というように時間がかかるとすれば，アキレスが亀に追いつくには，

$\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots\right)$分となって，たしかに，アキレスは亀に追いつけません．しかし，両者の速さの比が2：1で，アキレスがはじめ亀のいる地点に1分でついたとすれば，2分後にはアキレスは亀に追いつくことはすぐ計算できるでしょう．

〝無限〟というのは人間にとって永い間茫漠としていたもので，それが理論的に解明されだしたのは近世になってからでした．

高校で習う微分積分法は〝無限〟を根底にしてなりたっています．しかし，極限とか数列の収束とはどういうことかなど，直観に委ねた説明で，数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ が収束するとき，

$$\lim(a_n+b_n)=\lim a_n+\lim b_n$$
$$\lim(a_n-b_n)=\lim a_n-\lim b_n$$
$$\lim(a_nb_n)=(\lim a_n)(\lim b_n)$$
$$\lim\frac{a_n}{b_n}=\frac{\lim a_n}{\lim b_n}$$

ただし，$\lim b_n \neq 0$

などは証明ぬきで教科書にのせられています．

それは，無限をあつかう微分積分法の諸定理を厳密に証明することなど，初心者には荷が重すぎるからです．そこで，このような問題はこういう定理・公式に従って解きなさい，という方法がとられます．簡単な問題ならそれでいいのですが，すこし複雑なものになると，壁につきあたって，やっていることの意味がわからなくなるのです．たとえば，上の定理が関係する問題で，$\{a_n\}$，$\{b_n\}$ が収束するとき，という条件を忘れて誤答するというようなことがおこります．そこで，微分積分法の問題に対しては，できるだけ問題の意味をあきらかにする方法がとられなくてはなりません．そのような意図のもとにつくられたのが本書です．この書は，いわば，微分積分法を生かじりしてきた数学の小僧さんをひとかどの数学の職人さんに仕上げてくれるでしょう．教科書と入試問題とのギャップは，この一冊でかなり埋まるはずです．さらに数学の親方も目指したい人は，「解法の探求Ⅱ」の体系編などがその基礎になります．

註　アキレス：トロイ戦争におけるギリシャの英雄．生れたとき，産湯として，両手でかかとのところを持たれて逆さに不死身の池につけられたアキレスは，トロイ側をさんざん悩ますがやがて不死身でないかかとのところを傷つけられ落命する．いまいうアキレス腱の由来である．

本書の利用法

栗田哲也

◆ 理系受験生必須の関門，微積分の壁

高3になると，理系の受験生は誰でも，微分・積分の学習をしなければなりません．

この微分・積分という分野は，これまで習ってきた他の数学の分野とは，一味も二味も違う分野です．

まず第1にそこには極限を求めるという操作を通して，

‘無限’

という概念が入ってきます．

同時に，そこでは e^x だの $\log x$ だの，$\sin x$，$\cos x$ といった，いかにも扱いにくそうな，身近な親しみをおぼえにくい関数を相手にしなければならなくなります．

そのため，微分をはじめて学ぶ者にとって，次のような学習上の問題点が生じます．それは，

- 抽象性に辟易して，意味もわからないまま式をいじる
- 身近な興味をもてないため，どのような面白さがあるかわからない（つまり，興味づけの方向性を失ってしまう）

ということです．

もっとも，教科書を理解し，パターン化された問題を反復練習する学習初期の段階では，重大な障害に突きあたることはむしろ少ないといってよいでしょう．

それは，微積分は‘訓練’の比重が他の分野にくらべて高い．そのため，おきまりの作業をこなす上では，意味もわからず，興味もわかなくとも，日本人もち前のガンバリ根性でひたすら突き進めば何とかなってしまうという（悲しい？）特殊事情によります．

問題は，こうした初期の訓練段階を経て，晴れて「考えて意味のわかる中級の微積分」に進もうとしたときに起こります．

こうした応用段階の初期にきてはじめて，

「オレは今まで意味もわからず計算練習をしてきただけだった」とか，「微積分なんて面白くない，計算すれば何となく答えらしきものはでてくるけど……」といった受験生諸君の悲しい声が多く聞かれるようになります．

勉強するわりに，何故か得点がのびない，微積分がわかった気がしないという悩みをもつのも，この時期です．一種の壁に突きあたってしまうのです．

◆ 本書の目的と読者対象

そこで本書では，この第2段階初期の（微積分の壁に突きあたった）受験生を対象に，

- e^x や $\log x$ といった妖怪たちに慣れ親しみ，
- 微積分を考えて意味のわかる身近な存在にする

ことを目的とします．

この関門さえ突破すれば，微積分はもうおそれるにたりません．たいていの先輩たちが言っているように，

はじめは難しく思えたけれど，慣れてしまった後では数Ⅰや数Ⅱより点がとりやすいよ

ということになってきます．

みなさんも，この関門をはやく突破して，「微積分こそ得点源」というようになってください．

◆ 本書の構成

本書では，以上のような目的を実現するために，第1部から第3部までの，3段階の構成をとり，それぞれの段階に工夫をこらしました．

第1部：文字通り，計算訓練のコーナーです．このコーナーの目的は，あとで応用題を考えるときに計算でわずらわされ，大切なポイントに目が行かなかったなどということがないように，計算を軽々できるようになるまで，時間制限を設けた訓練をすることです．

第2部：微積分を身近に使いこなせるものとするため様々な角度から200位のポイントを選びました．これらのポイントは，少しずつ読み進めてもよいし，苦手なところを拾い読みしてもよいでしょう．「キーポイントマスター」として，e^x や $\log x$ などの妖怪を征服するための解説記事もつけました．

第3部：第2部までをもとに，大学入試で何度も出題された有名問題，典型問題のポイントを解明します．ここをマスターすれば，大学入試の微積分の問題の8割方は，すぐ方針が立つようになるでしょう．

なお本書で用いた各種記号については，各部の扉の前にまとめてあります．（☞p.19，p.81）

目　次

なお，第2部，第3部については，各扉（p.19，p.81）のところに
説明があります

§1.　計算力のチェック

これらの計算問題は，教科書が8割程度わかったところで時間制限を設けて解くと効果が倍増します．〈 〉内は時間の目安で，たとえば〈15 → 8〉は，はじめて見るときは15分かかっても構わないが，最終的には8分でクリアしたい問題ということを表します．

□1. ［有理化］ 次の極限を求めよ．〈15 → 5〉

（1） $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\sqrt{x}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})$ （東京電機大）　（2） $\displaystyle\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+2x+2}-\sqrt{x^2-2x+2})$ （室蘭工大）

（3） $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+x}+x)$ （大阪工大）　（4） $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{x}{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}$ （九州東海大）

□2. ［有理化・やや発展］ 次の極限を求めよ．〈10 → 5〉

（1） $\displaystyle\lim_{x\to\infty}x\left(3-\sqrt{9-\frac{2}{x}}\right)$ （神奈川大）　（2） $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\left(\frac{1}{\sqrt{1-x}}-\frac{2}{\sqrt{4-x}}\right)$ （東邦大）

□3. ［因数分解・二項定理］ 次の極限を求めよ．〈20 → 7〉

（1） $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$ （岩手医大）　（2） $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{x^n-x^{-n}}{x-x^{-1}}$ ［n は正の整数］ （福岡教育大）

（3） $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{(1+x)^n-1-nx}{x^2}$ ［n は2以上の自然数］ （横浜市大）

□4. ［三角関数］ 次の極限を求めよ．〈15 → 7〉

（1） $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sin(2\sin3x)}{x}$ （東邦大）　（2） $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{1-\cos\left(\frac{1}{3}x\right)}$ （立教大）

（3） $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{3\cos^2x+2\cos x-5}{x^2}$ （小樽商大）　（4） $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}}$ （摂南大）

□5. ［三角関数］ 次の極限を求めよ．〈10 → 5〉

（1） $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}}{x}$　（2） $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}$ （岩手大）

□6. ［指数関数］ 次の極限を求めよ．〈15 → 5〉

（1） $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{3^{n+1}+5^{n+1}+7^{n+1}}{3^n+5^n+7^n}$ （愛知工大）　（2） $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{3^x}{2^x+3^x}$ （北海道工大）

（3） $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{2x}\right)^x$　（4） $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n}{2n-1}\right)^{3n}$ （東京電機大）

□7. ［対数関数］ 次の極限を求めよ．〈10 → 3〉

（1） $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x\log(1+x)}$　　（2） $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\log(3^x+9^x)$

□8. ［微分の定義式］ $f(x)$ が微分可能なとき，次の極限を $f(a)$，$f'(a)$ で表せ．〈8 → 3〉

（1） $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(a+3h)-f(a-2h)}{h}$　（東京電機大）　（2） $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{x^2f(a)-a^2f(x)}{x-a}$　（千葉経済大）

□9. ［微分の定義式と見る］ 次の極限を求めよ．〈20 → 8〉

（1） $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{a+h}-\sqrt{a-h}}{h}$　$[a>0]$　（小樽商大）　（2） $\displaystyle\lim_{x\to\infty}x(\sqrt[x]{2}-1)$　（愛知工大）

（3） $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{ae^{f(x)}-xe^{f(a)}}{x^2-a^2}$　（武蔵工大）　（4） $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{x^nf(x)-a^nf(a)}{x^n-a^n}$　（鹿児島大）

□10. ［極限計算の工夫］ 次の各問いに答えよ．〈15 → 5〉

（1） 数列 $\{a_n\}$ が $a_1=1$，$a_2=e$，$a_{n+1}=\sqrt{a_na_{n-1}}$　$[n\geqq 2]$ をみたすとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n$ を求めよ．

（2） 次の無限級数を求めよ．$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+2)}$　（信州大）

□11. ［微分の計算］ 次の各問いに答えよ．〈15 → 7〉

（1） $f(x)=\dfrac{2x}{x^2-1}$ を微分せよ．　（2） $y=\sqrt{\dfrac{x^2-9}{x+8}}$ を微分すると，$y'=\boxed{}$ となる．

（拓殖大）

（3） $f(x)=\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+x}}}$ のとき，$\dfrac{1}{f'(0)}=\boxed{}$ である．　（小樽商大）

（4） 関数 $f(x)=\log\left(\tan\dfrac{x}{2}\right)$ の，$x=\dfrac{\pi}{6}$ における微分係数を求めよ．　（横浜国大）

□12. ［対数微分法］ 次の各問いに答えよ．〈7 → 3〉

（1） 関数 $y=x^{x^2}$　$[x>1]$ を微分せよ．　（国士舘大）

（2） 関数 $y=x^{\sqrt{x}}$　$[x>0]$ を微分せよ．　（東京電機大）

（3） 曲線 $y=(2x+1)^{2x+3}$ 上の点 $(0,\ 1)$ における接線の傾きを求めよ．　（東邦大）

□13. ［逆関数と微分］ 次の各問いに答えよ．〈20 → 10〉

（1） $f(x)=\cos x$　$[\pi<x<2\pi]$ の逆関数を $g(x)$ とするとき，$g(x)$ の導関数を求めよ．　（富山医薬大）

（2） 正接の逆関数を $\tan^{-1}x$ と書く．$f(x)=6\tan^{-1}x$ のとき，$f'(1)$ を求めよ．　（自治医大）

（3） $\tan y=x$ が与えられたとき，$y=\dfrac{\pi}{4}$ での $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ の値を求めよ．

計算力のチェック 解答

1. 差が $\infty-\infty$ や，$0-0$ の形になる場合は，「有理化」がポイントになります．

【解答】

（1） $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\sqrt{x}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})$

$\displaystyle=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$

$\displaystyle=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$ 　分母，分子を $\sqrt{x}$ で割る

$\displaystyle=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{1}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+\sqrt{1}}=\mathbf{\frac{1}{2}}$

⇨注　これはいわば分子の有理化です．元の形のままだと $\infty\times0$ の形になるので，式変形をしたわけです．

（2） $\displaystyle\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+2x+2}-\sqrt{x^2-2x+2})$

$\displaystyle=\lim_{x\to\infty}\frac{(x^2+2x+2)-(x^2-2x+2)}{\sqrt{x^2+2x+2}+\sqrt{x^2-2x+2}}$ 　分母，分子を x で割る

$\displaystyle=\lim_{x\to\infty}\frac{4}{\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}}}=\mathbf{2}$

⇨注　$x\to\infty$ のとき，
$\sqrt{x^2+2x+2}=\sqrt{(x+1)^2+1}\fallingdotseq x+1$,
$\sqrt{x^2-2x+2}=\sqrt{(x-1)^2+1}\fallingdotseq x-1$
という「感覚」があれば，$(x+1)-(x-1)=2$ というように，暗算程度で答えが出ます．

（3） $-x=y$ とおきかえると，

$\displaystyle\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+x}+x)=\lim_{y\to\infty}(\sqrt{y^2-y}-y)$

$\displaystyle=\lim_{y\to\infty}\frac{(y^2-y)-y^2}{\sqrt{y^2-y}+y}=\lim_{y\to\infty}\frac{-1}{\sqrt{1-\frac{1}{y}}+1}$

$\displaystyle=\mathbf{-\frac{1}{2}}$

⇨注　$\sqrt{x^2}=|x|$ なので，$\displaystyle\sqrt{x^2+x}=\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}}$ は，$x\to-\infty$ のとき，およそ $\displaystyle\left(-x-\frac{1}{2}\right)$ と見ることができ，$\displaystyle\left(-x-\frac{1}{2}\right)+x=-\frac{1}{2}$ と答えを出すことができます．でも，x が負の場合には，$\sqrt{x^2}=x$ という錯覚をしやすいので［正しくは $\sqrt{x^2}=-x$］，上記の解答のように，$-x=y$ というおきかえをするのが安全です．

（4） $\sqrt[3]{1+x}=a$，$\sqrt[3]{1-x}=b$ とおくと，

$a^3-b^3=2x$ より $x=\frac{1}{2}(a^3-b^3)$ なので，

$\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{x}{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{2}(a^3-b^3)}{a-b}$

$\displaystyle=\lim_{x\to0}\frac{1}{2}(a^2+ab+b^2)$ ……………………………（☆）

ここで，$\displaystyle\lim_{x\to0}\sqrt[3]{1+x}=1$，$\displaystyle\lim_{x\to0}\sqrt[3]{1-x}=1$ なので，

$\displaystyle(☆)=\frac{1}{2}(1^2+1\times1+1^2)=\mathbf{\frac{3}{2}}$

⇨注　3乗根の形でも有理化の方針は変わりません．素朴に（おきかえをせずに）やれば，分母，分子に
$(\sqrt[3]{1+x})^2+\sqrt[3]{1+x}\sqrt[3]{1-x}+(\sqrt[3]{1-x})^2$
という「かたまり」をかけることになります．
［展開公式 $(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$ の利用］
上の解答のようなおきかえをすると，そこがスマートに変形できるわけですが，本質的には同じことです．

2. 前問と同様に「有理化」がポイントですが，問題を見ただけでは，多少気づきにくいでしょう（でもこの程度はすぐ気づくようになるまで慣れてほしい！）．なお，lim を式変形の際に毎回書くのは面倒なので，ここでは，まずは lim の中身だけを式変形することにします．

【解答】

（1） $\displaystyle x\left(3-\sqrt{9-\frac{2}{x}}\right)=\frac{x\left\{3^2-\left(9-\frac{2}{x}\right)\right\}}{3+\sqrt{9-\frac{2}{x}}}$

$\displaystyle=\frac{2}{3+\sqrt{9-\frac{2}{x}}}\to\frac{2}{3+3}=\mathbf{\frac{1}{3}}\quad(x\to\infty)$

（2） $\displaystyle\frac{1}{x}\left(\frac{1}{\sqrt{1-x}}-\frac{2}{\sqrt{4-x}}\right)=\frac{1}{x}\cdot\frac{\sqrt{4-x}-2\sqrt{1-x}}{\sqrt{1-x}\sqrt{4-x}}$

$\displaystyle=\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x}\sqrt{4-x}}\cdot\frac{(4-x)-2^2(1-x)}{\sqrt{4-x}+2\sqrt{1-x}}$

$\displaystyle=\frac{3}{\sqrt{1-x}\sqrt{4-x}(\sqrt{4-x}+2\sqrt{1-x})}$

$\displaystyle\to\frac{3}{1\cdot2\cdot(2+2)}=\mathbf{\frac{3}{8}}\quad(x\to0)$

3. 極限の問題の多くは，式変形にポイントがあります．(1)のように，ちょっと変形すると分母と分子でどんどん約分できるようなケースは，気持ちよいものです．

【解答】（1） $\displaystyle\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$

$=\dfrac{2^2-1}{2^2}\cdot\dfrac{3^2-1}{3^2}\cdot\cdots\cdot\dfrac{n^2-1}{n^2}$

$=\dfrac{(2+1)(2-1)}{2^2}\cdot\dfrac{(3+1)(3-1)}{3^2}\cdot\cdots\cdot\dfrac{(n+1)(n-1)}{n^2}$

$=\dfrac{\cancel{3}\times1}{2\times\cancel{2}}\cdot\dfrac{\cancel{4}\times\cancel{2}}{\cancel{3}\times\cancel{3}}\cdot\dfrac{\cancel{5}\times\cancel{3}}{\cancel{4}\times\cancel{4}}\cdot\cdots\cdot\dfrac{(n+1)\cancel{(n-1)}}{\cancel{n}\times n}$

$=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{n+1}{n}\to\dfrac{1}{2}\quad(n\to\infty)$

(2) [xをa, x^{-1}をb とおきかえると]

$\dfrac{x^n-x^{-n}}{x-x^{-1}}=\dfrac{a^n-b^n}{a-b}=\underbrace{a^{n-1}+a^{n-2}b+\cdots+ab^{n-2}+b^{n-1}}_{n\text{項}}$

ここで, $\lim\limits_{x\to1}a=1$, $\lim\limits_{x\to1}b=1$ だから, 答えは $\boldsymbol{n}$

⇨注 上の解答でおきかえをしているのは, 単にその方が見やすいという理由で,

$\dfrac{x^n-x^{-n}}{x-x^{-1}}=x^{n-1}+x^{n-3}+\cdots+x^{3-n}+x^{1-n}$

としても, 本質的には同じことです. ポイントはあくまで, 上の網目部の式変形です.

(3) 2項定理により,

$(1+x)^n=1+{}_n\mathrm{C}_1x+\cdots+{}_n\mathrm{C}_{n-1}x^{n-1}+x^n$ だから,

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(1+x)^n-1-nx}{x^2}$

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{{}_n\mathrm{C}_2x^2+(x\text{の3次以上の項})}{x^2}={}_n\mathrm{C}_2$

4. 三角関数の極限は, $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ が基本となります. その他は, 式変形によりこの式に帰着させることになりますが, (1), (2)の注に書いた事項は, おぼえておくと便利でしょう.

【解答】

(1) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin(2\sin3x)}{x}$

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin(2\sin3x)}{2\sin3x}\cdot\dfrac{2\sin3x}{3x}\cdot\dfrac{3x}{x}$ ……………………(☆)

であり, $x\to0$のとき, $2\sin3x\to0$, $3x\to0$ だから, 網目部はどちらも1に収束する.

よって, (☆)$=2\times3=\boldsymbol{6}$

⇨注 上の式変形は, はじめは巧妙に見えるかもしれませんが, ともかく基本は $\dfrac{\sin x}{x}$ を作ること, と考えれば, 強引に変形しても上のようになるはずです.

$2\sin3x=y$, $3x=z$ とおきかえれば,

$\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0\\z\to0}}\dfrac{\sin y}{y}\cdot\dfrac{2\sin z}{z}\cdot3$ となって見やすいでしょう.

(2) $1-\cos x=2\sin^2\dfrac{x}{2}$ である. これを使うと,

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{1-\cos\left(\dfrac{1}{3}x\right)}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2\sin^2\dfrac{x}{2}}{2\sin^2\dfrac{x}{6}}$

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\left(\dfrac{x}{6}\right)^2}{\sin^2\dfrac{x}{6}}\cdot\dfrac{\sin^2\dfrac{x}{2}}{\left(\dfrac{x}{2}\right)^2}\cdot9=\boldsymbol{9}$ $\left(\begin{array}{l}\text{一般に, } t\to0\text{ のとき}\\ \dfrac{\sin^2t}{t^2}=\left(\dfrac{\sin t}{t}\right)^2\to1\end{array}\right)$

⇨注 実は, $x\to0$ のとき $1-\cos x\fallingdotseq\dfrac{x^2}{2}$ と見なすことができ, こうした「奥の手」を使えば, 答えが $\dfrac{\dfrac{1}{2}x^2}{\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x}{3}\right)^2}=9$ であることは, すぐわかります.

(3) 分子$=3(\cos^2x-1)-2(1-\cos x)$

$=(1-\cos x)(-5-3\cos x)$ と変形でき,

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3\cos^2x+2\cos x-5}{x^2}$

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}\cdot(-5-3\cos x)=\dfrac{1}{2}\cdot(-8)=\boldsymbol{-4}$

⇨注 上の〰〰より, $\dfrac{1-\cos x}{x^2}\fallingdotseq\dfrac{1}{2}$ と見るわけです.

(4) 分母, 分子に $(1+\cos x)(\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2})$ をかけると,

与式$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(1-\cos^2x)(\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2})}{\{(1+x^2)-(1-x^2)\}(1+\cos x)}$

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin^2x(\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2})}{2x^2(1+\cos x)}=\dfrac{2}{4}=\boldsymbol{\dfrac{1}{2}}$

⇨注 このように $1-\cos x$ に $1+\cos x$ をかけるのもよくある手法で, これを用いると,

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin^2x}{x^2}\cdot\dfrac{1}{1+\cos x}=\dfrac{1}{2}$ です.

5. 今までの手筋をくみあわせてみましょう.

【解答】

(1) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}}{x}$

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(1+\sin x)-(1-\sin x)}{x(\sqrt{1+\sin x}+\sqrt{1-\sin x})}$

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2\sin x}{x}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{1+\sin x}+\sqrt{1-\sin x}}$

$=2\cdot\dfrac{1}{2}=\boldsymbol{1}$

(2) $\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}=\dfrac{\sin x-\sin x\cos x}{x^3\cos x}$

$=\dfrac{\sin x(1-\cos x)}{x^3\cos x}=\dfrac{\sin^3x}{x^3\cos x(1+\cos x)}$

キーポイントマスター

1. 展開の話

本来は大学課程で習うけれど，知っておくと大変トクな‘関数の展開’．そのココロは，e^x，$\log x$，$\sin x$ など数Ⅲの主役となる‘化け物たち’を整関数もどきで近似することにあります．

$$\log 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots\cdots$$

などがよくわかったら楽しいですね．まずは軽いお話として読んでみてください．わかると，大学入試問題の背景が急に見えるようになります．

1. 局所の情報で全体を知る

顕微鏡でサッカーボールの一部を観察したら，そのサッカーボールを使って行なわれたＪリーグの試合のことがすべてわかってしまった．

そんなことあるわけないですよね．

でも，数学の世界では事情は異なるようです．

いま，「顕微鏡で $f(x)$ のグラフの $x=0$ の近辺さえ見せてくれれば，$f(x)$ のグラフ全体について何でもわかる」と主張している人（仮に名前をヤマダとしましょう）がいます．

ヤマダが本当に超能力を持っているかどうか，本書の編集部で実験をしました．

まず，右図1のようなグラフをパソコンで描き，次に，$x=0$ の近辺以外は，図2のように隠します．

これをヤマダに与えて，一定時間，顕微鏡で観察してもらいます．

ヤマダは観察の結果，

$f(0)=1$，$f'(0)=3$

$f''(0)=-1$，$f^{(3)}(0)=4$

を見抜きました．

$x=0$ の近辺だけなら，どんな情報でもわかる，すごい顕微鏡を持っているようです．

以下，編集部とヤマダとの会話ですが……

図1

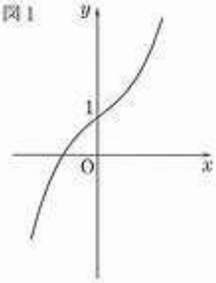
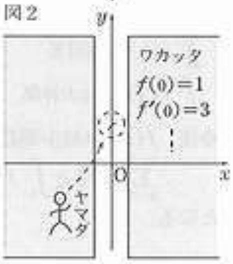


図2



編集部：「この関数を表す式はわかりましたか？」

ヤマダ：「ハテサテ……」

編集部：（少しじれったくなって）「では重大なヒントをあげましょう．実はこの関数は３次関数…」

ヤマダ：「それなら話はカンタンです．答えは，

$$f(x) = 1 + 3x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{2}{3}x^3$$

です．」

編集部：………

＊　　＊　　＊

さて，みなさんにはこの会話の意味はおわかりですか．ヤマダは本当に超能力者でしょうか．

実は，数学的には次のようにいえます．

３次関数 $f(x)$ を，$a+bx+cx^2+dx^3$ とおきます．

$$\begin{aligned} f(x) &= a + bx + cx^2 + dx^3 \\ f'(x) &= \quad b + 2cx + 3dx^2 \\ f''(x) &= \qquad 2!c + 6dx \\ f^{(3)}(x) &= \qquad\quad 3!d \end{aligned} \quad \xrightarrow[\text{を代入}]{x=0} \quad \boxed{\begin{aligned} f(0) &= a \\ f'(0) &= b \\ f''(0) &= 2!c \\ f^{(3)}(0) &= 3!d \end{aligned}}$$

この網目部分と，魔法の顕微鏡で知った $f(0)$〜$f^{(3)}(0)$ の値から，ヤマダは a〜d の値を逆算したのでした．

このように整関数には，$x=0$（局所）の情報だけで全体がみなわかってしまうという，おそるべき性質があります．それは，

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + \cdots$$

とするとき，

$$\begin{aligned} f'(x) &= a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + 4a_4x^3 + \cdots \\ f''(x) &= \quad 2!a_2 + 6a_3x + 12a_4x^2 + \cdots \\ f^{(3)}(x) &= \qquad 3!a_3 + 24a_4x + \cdots \\ f^{(4)}(x) &= \qquad\quad 4!a_4 + \cdots \\ &\vdots \qquad\qquad \vdots \end{aligned}$$

の各式で $x=0$ とおくと

$$f(0)=a_0,\ f'(0)=a_1,\ f''(0)=2!a_2,$$
$$f^{(3)}(0)=3!a_3,\ f^{(4)}(0)=4!a_4,\ \cdots$$

となることから，

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4 + \cdots$$

として求めればよいのです．

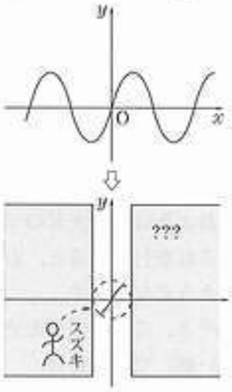
＊　　＊　　＊

どうやら，ヤマダは，頭はよさそうですが超能力者ではなかったようです．

それにしても，整関数以外の関数では事情はどうなのでしょうか．やはり局所の情報で全体がわかるのでしょうか，それとも……

2. $\sin x$ のお話

世の中には，他人の成功を見てそれを真似しようという輩がいるものです．ヤマダの成功を見ていたある男が（仮に名前をスズキとしましょう）強引にヤマダから‘魔法の顕微鏡’を借りて，自分だって $x=0$ でのグラフを見せてもらえば，関数の式があてられると言いはじめました．



そこで編集部では，スズキの超能力も実験で試すことにして，右図のようなグラフを用意しました．

ところで，‘ヤマダの顕微鏡’で $x=0$ 近辺のグラフをのぞいてみたスズキは，本当に驚いてしまいました．それは，

$f(0)=0$，$f'(0)=1$

$f''(0)=0$，$f^{(3)}(0)=-1$

$f^{(4)}(0)=0$，$f^{(5)}(0)=1$

$f^{(6)}(0)=0$，$f^{(7)}(0)=-1$

……　　……

というように，0，1，0，-1 という4つの数字が，どこまで行っても周期的にくりかえされていたからです．

以下編集部とスズキの会話ですが……

編集部：「この関数を表す式はわかりましたか？」

スズキ：「うーん，わからない」

編集部：「それでは，重大なヒントをあげましょう．実はこの関数は整関数ではありません」

スズキ：「えっ」（と驚いて）「ウソだ！この関数はね，えーと（と計算して）

$$0+x+\frac{0}{2}x^2+\frac{-1}{3!}x^3+\frac{0}{4!}x^4+\frac{1}{5!}x^5+\cdots$$

つまり，

$$x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}-\cdots$$

のはずだよ！」

編集部：「残念でした．実はこの関数は，$\sin x$ なんですよ」

*　　*　　*

さて，みなさんは上の会話を聞いてどう思われましたか？

結論を先に言ってしまえば，実は，

$$\sin x=x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}-\cdots \text{（以下どこまでも続く）}$$

というように，$\sin x$ は「無限個の整関数のたし算」として表されることがわかっています．ですから，スズキもまったくのデタラメを主張したわけではありません．

このように，関数は（特に何回でも微分可能な関数は）多くの場合，無限個の整関数のたし算として表されることがわかっています．これを

関数を展開する

といいます．

特に上のような展開方法を**マクローリン展開**と呼んでおり，その一般形は，

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3+\cdots$$

です．$\sin x$ は微分すると，

$$\sin x \to \cos x \to -\sin x \to -\cos x \to \cdots$$

というように周期4で変化し，したがって，

$f(0)$，　$f'(0)$，　$f''(0)$，　$f^{(3)}(0)$，…

の値も，

0，　1，　0，　-1，…

という周期4で変化するのです．

この，$\sin 0$，$\cos 0$，$-\sin 0$，$-\cos 0$ の値である 0，1，0，-1 こそ，スズキが「ヤマダの顕微鏡」で見た $f(0)$，$f'(0)$，… の正体だったわけです．

3. 代表的な関数を展開する

高校数学で出てくる整関数以外の代表的関数は，

$$e^x,\ \log(1+x),\ \sin x,\ \cos x$$

の4つです．（$\log x$ は $\log 0$ が定義できないので，0近辺（0以下）での挙動がわかりません．そこで，$\log(1+x)$ で代用してあります．）

これら4つの関数について，「ヤマダの顕微鏡」で $x=0$ の近辺をのぞいてみると，

	$f(0)$	$f'(0)$	$f''(0)$	$f^{(3)}(0)$	$f^{(4)}(0)$
① e^x	1	1	1	1	1…
② $\log(1+x)$	0	1	-1	2!	$-(3!)$
③ $\sin x$	0	1	0	-1	0…
④ $\cos x$	1	0	-1	0	1…

となって，きれいな規則性が見受けられます．

したがって，①～④の各関数を展開してみると，

① $e^x=1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^4}{4!}+\cdots$

② $\log(1+x)=x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{x^4}{4}+\cdots$

③ $\sin x=x-\dfrac{x^3}{6}+\dfrac{x^5}{120}-\cdots$

④ $\cos x=1-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^4}{24}-\cdots$