はじめに

黒木正憲

数年前，シドニー大学が発信する「数学コンテスト」の問題のなかに，つぎのような一題がありました．

「5つの自然数のうちのどの2つの数をとっても，その差がそれらの2つの数の最大公約数になっているような5つの数を求めよ」

そのころ，国際数学オリンピックの日本選手団の一人に選ばれた中学3年のM君は，それに対してしばらく考えたあと，つぎのように解答しました．

“題意をみたすような3つの自然数で簡単なものは，2，3，4である．これらの最小公倍数は12であるから，12，12+2，12+3，12+4，すなわち，
12，14，15，16は題意をみたす4つの自然数である．

そこで，12=3×4，14=2×7，15=3×5，16=4×4の最小公倍数　3×4×4×5×7=1680　を求めると，

1680，1680+12，1680+14，1680+15，1680+16

すなわち，1680，1692，1694，1695，1696

が題意をみたす5つの数である”

一方，わたしは，小さい自然数のなかで，題意のような条件をみたすものは何かと考えていました．

4つの数ならば，12，14，15，16　…………………①

というのが題意をみたす数であることはすぐわかります．

これに対して，もう一つの数を17から24まで探しても題意をみたす数はえられません．

①を2倍してえられる　24，28，30，32　…………②

は，2つの数の差が2倍になるだけで題意の条件をみたしますから，もう一つの数を33から48までの数で探します．ここで，36はよさそうですが，28と36との差8はこれらの最大公約数でなく，この場合，条件をみたす数はみつかりません．そこで，鉛筆を置いて，近所の表通りを散歩しながら，暗算で計算することにしました．

そこで，①を3倍した，36，42，45，48　…………③

について，37から72までの数で条件をみたすものを調べました．37，38，39はどれも適さないことはすぐわかります．つぎの40は？と考えたとたん，なんだかうまくいきそうな気がします．検算をしてみると，40は②の各数のどれに対しても，それとの差でそれら2つの数の最大公約数になっています．

こうして，条件をみたすおそらく最小の自然数の組

36，40，42，45，48

がえられたのでした．

ところで，あとから送られてきたシドニー大学のこの問題に対する解答としては，さきのM君の解法と解答が示されていました．

それは，理詰めで結果がえられるのですから，数学者としては当然の解法でしょう．それに対して，わたしの解法は，直観が頼りの試行錯誤の方法です．この問題の場合，この方法できれいな結果はえられましたが，一般におすすめできる解法ではありません．

条件をみたす数を求めるとか，条件をみたす場合の数を求めるとかの問題には，たいてい，いろんな考えかた解法があって，まず手をつけるのに苦労するのですが，そこには，パズルを解くような楽しみもあって，この種の問題を解きすすむにつれて，数学的な論理と直観が身についていくところです．

たとえば，あまり数学が身にしみていない人に，「高校野球の夏の大会には49校が参加して優勝を争いましたが，トーナメント方式で優勝がきまるまで何試合行うことになるでしょう」と聞いてごらんなさい．

相手はかならず組合せ表など作って数えはじめることでしょう．“一試合ごとに一校が消えていくから，求める試合数は48”という考えが思い浮かばないのです．

さて，この書は，“分野別シリーズ”として，「マスターオブ整数」につづく第2弾です．どちらも，受験生が苦手とするところで，問題を解くのに苦労する分野ですが，その苦労を重ねて，これらの分野の基本的な知識と論理に馴れてくるにつれ，目の前が明かるくなって，苦労が楽しみに変わるのが，この分野でもあるのです．

まずは，手にとって，易しいところから読みはじめてください．

（くろき　まさのり）

本書の利用法

栗田哲也

◆ 目　的

本書は，「場合の数（個数の処理）」をテーマとする，「マスター・オブ・整数」（小社既刊）の姉妹篇です．小学校以来おなじみの，

数え上げたら何通り？

という問題を中心テーマに据え，一見単純でつまらなそうな数えるという作業が，実は楽しく奥が深い分野であることを知ってもらうために企画しました．

近年コンピュータの発展とともに，この分野の重要性は，とみに増しており，教科書や大学入試での比重も，教科改訂ごとに年々重くなってきています．

これからの入試の1つのキーポイントといっても，決して過言ではないでしょう．

◆ 対　象

本書で対象とする読者は，

① 場合の数（個数の処理）を得意分野にしたい受験生

② 数学の面白さにふれ，系統立った学習をしたい，中学上級～高2生

です．

場合の数は，'数える' という誰にでも理解できるとっつきやすい分野なので，入口は広いのですが，反面正確に数えるということが如何に難しいか，身にしみて知っている人も少なくないことでしょう．

基礎となる分野だけに，そこには，

分類・整理する
自分で手を動かし実験する
規則性を見ぬいて一般化する
対応や意味づけを考える

といった，数学的思考のイロハが，典型的な形でたっぷりもりこまれています．

従って，場合の数を勉強すると，数学の他分野にも通じる思考力が一緒に鍛えられて，一石二鳥の効果があるといえます．

特に，これから数学を学習していく中3～高2のみなさんが，数学の入口で楽しみながら思考力を鍛えていくのに，場合の数は，「整数」「図形（初等幾何）」と並んで，最適な分野の一つだといえるでしょう．

◆ 構　成

本書は，第0部から第4部までの5部構成です．順を追って説明していくと，

① **第0部**

第1部の問題に取りかかる前に，ぜひ通読しておきたい必須事項や考え方を述べた部分です．

② **第1部**

「数え上げ」の必須手法を系統別に14章にまとめ，それぞれの手法が最も典型的な形で学習できる問題を，各章に4～6題つけてあります．

この章を1通り学習するだけで，大学入試の「数え上げ」はほとんどおそろしくなくなるでしょう．

まず，どんな方法でもよいから，自力で解答を試み，それから解答と照らしあわせてください．

問題の左にある傍注のうち，☆はヒントとなるコメントであることを，★はそれ以外のコメントであることを表します．右段上の記号は，各問の難易度を表し，

A．基本　B．標準　C．やや難しい　D．難問

＊の数は，地道に（テクニックを余り用いずに）解いた場合の所要時間の目安を表しており，＊1つについて10分です．（＊＊とあれば20分ということ）ただし，＊のないものについては，地道な（しらみつぶしの）やり方は余りおすすめできません．

問題番号の肩のところに＊があるものは，その問題の別解がp.59～にあることを示します．

研究問題は，大部分が難しい問題ですので，自信のある人以外ははじめはとばしても構わないでしょう．

③ **第2部**

知識をまとめていくコーナーです．くわしい利用法はp.65のトビラに書いてあります．

④ **第3部**

大学入試問題で実戦的訓練を，というコーナーです．くわしい利用法は，p.85のトビラに書いてあります．

⑤ **第4部**

より発展的な問題を演習したい人のためのコーナーですが，入試のレベルを超えますので，自信があり，難問に挑戦したい人のみ学習してください．

なお，全体にわたる記号として☞は参照ページを，⇨注は，補足説明を表します．

目　次

§1 整理して数える(1)

$\boxed{1}$ A＊　$\boxed{2}$ B＊＊
$\boxed{3}$ A＊＊　$\boxed{4}$ A＊＊
$\boxed{5}$ B＊＊

☆表で整理する.（36通りしかない）

1. 1つのさいころを2回ふるとき（1回目と2回目は区別する）, 出る目の積が4の倍数となるような目の出方は何通りあるか.

☆場合分けのポイントは, '排反'（ダブリを防ぐ）.

2*. 1つのさいころを3回ふるとき（1, 2, 3回目はすべて区別する）, 出る目の積が8の倍数となるような目の出方は何通りあるか.

☆はじめはオオカミ, 次はヒツジ, というように樹形図でどんどん場合分けしていきます.（カタラン数と勘違いしないこと. ☞p.82）

3*. オオカミが4匹, ヒツジが4匹いる. これらの8匹を1つのオリの中に入れるのに, オオカミの数がヒツジの数より多くなると, ヒツジは食べられてしまう（同数以下なら食べられない）. では, ヒツジが食べられないように, この8匹を1匹ずつすべてオリの中に入れる方法は, 何通りあるか. ただし, オオカミ4匹は区別せず, ヒツジ4匹も区別しないものとする.

☆(2)：全部作った順にたしていくのは ちょっと下手です.

4. $\boxed{0}\boxed{1}\boxed{2}\boxed{3}$ の4枚のカードから3枚を選んで, 左から1列に並べて3桁の整数を作る.

（1） 全部で整数はいくつできるか.

（2） (1)で作った整数すべての総和を求めよ.

★うっかりと, 1ぺんに計算でかたをつけようとするとおとし穴がまっています. $\boxed{4}$のカードが2つあるのがクセモノ.

5. 5枚のカード $\boxed{0}\boxed{1}\boxed{4}\boxed{4}\boxed{5}$ から3枚をとりだして左から順に並べて3桁の整数をつくる.

（1） このような3桁の整数は, 全部でいくつできるか.

（2） (1)のうち, 150より大きい整数はいくつできるか.

（3） (1)のうち, 6で割りきれる整数はいくつできるか.

研究問題

[整理は数え上げの根本なので, この章だけ, 研究問題を3題にしてあります]

1. 10円玉, 50円玉, 100円玉の3種類の硬貨のみ用いて（使わないものがあってもよい）, おつりなしに1000円を支払う方法は何通りあるか.

2. 10本中2本のあたりくじがあるくじびきをする. 10人の人が順番に引いていき, あたりくじが2本とも出たとき, このくじびきは終了する. くじを引く人の数は平均すると何人か.

3*. 青玉が3個, 赤玉が3個, 白玉が3個ある. この中から5個の玉を選んで左から順に1列に並べる.

（1） 並べ方は何通りあるか.

（2） 同色の玉が隣り合わないような並べ方は何通りあるか.

[解答は p.54]

解 答 篇

§1 整理して数える(1)

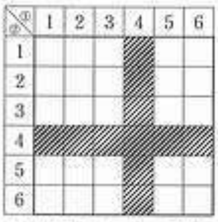
1. さいころを2回ふるとき，1度目の6つの目と2度目の6つの目の出方を組み合わせた，$6\times6=36$（通り）の場合が生じます．これを，以下の解答のような**表に整理**すると便利です．

【解答】

出る目の積が4の倍数になるのは，

1° 少なくとも1回は4が出る（右図の斜線部）

2° 1° 以外で，2回とも偶数が出る（右図の網目部）



横は1回目，たては2回目に出る目の数

のいずれかで，

1° の場合は，11通り（$6\times2-1$）
2° の場合は，4通り（2×2） ［図より］

なので，計 $11+4=$**15（通り）**

⇨注 ‘さいころ2回’ の問題は，6×6の表に整理すると，(あとは適する場合を数えるだけなので）すべて解決します．でも，あらわれる模様［上図など］の規則性から，数え上げ方を工夫して，もっと難しい問題に応用したりすると，なおよいでしょう．

2. ‘さいころ3回’ の場合には，前問のときの図を描いて，その36個のます目の1つずつに対して，3回目の目の出方（6通り）の組み合わせを考えるか，さもなければ別の整理法を考えなければなりません．前者は「しらみつぶし的」で，手間さえいとわなければ確実です．後者の場合は，互いに**排反な**［重なりのない］**場合分け**がポイントになりますが，整理法を自分で考えなければなりません．

【解答】

出る目の積が8の倍数になるのは，

1° 3回とも偶数が出る．

2° 3回のうち2回だけ偶数が出る．

の2通りの場合がある．

1° の場合は，1回目に2，4，6のどれか
2回目に2，4，6のどれか
3回目も2，4，6のどれか

であり，$3\times3\times3=27$（通り）

2° の場合は，偶数が出るのが，

（ア） 1回目と2回目
（イ） 2回目と3回目
（ウ） 3回目と1回目

の3つの場合がある．(ア)の場合は，1回目と2回目のうち「少なくとも1回は4」で，「もう1回も偶数」だから，1回目と2回目の目の出方は5通り（右表）で，そのそれぞれに対して3回目の目の出方は，1，3，5のどれかで，

$5\times3=15$（通り）

(イ)，(ウ)の場合も，(ア)と同様15通りだから，答えは，$27+3\times15=$**72（通り）**

⇨注 1° と2° は排反（重なりがない）で，2° をさらに場合分けした(ア)，(イ)，(ウ)も排反です．‘排反’ こそダブリを防ぐ基本で，場合分けのポイントです．

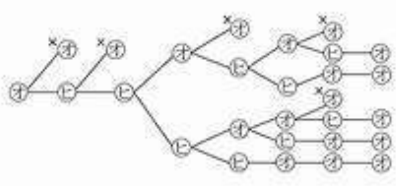
3. **樹形図**を用いて，どんどんと場合分けをしていくことになります．

【解答】

オオカミを㋔，ヒッジをⓗとして樹形図を描く．はじめの2匹が㋔の場合は，あとはどうやってもダメなことと，㋔の数がⓗの数より多くなったらダメ（そこで樹形図を終わらせる）なことに注意すると，樹形図は次のようになる．

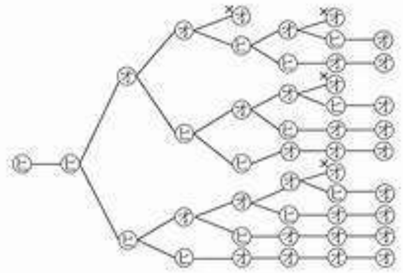
［左から順に1匹目，2匹目，……］

(1)



（2） ㋪−㋔−…の樹形図は，㋔−㋪−…の場合と同じになる．

（3）



以上，（1）の場合5通り

（2）の場合5通り

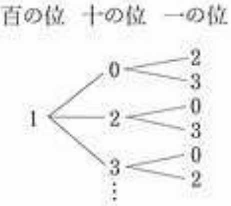
（3）の場合9通り

をあわせて，答えは，5+5+9=**19（通り）**

4．これも樹形図を描く問題です．**樹形図を描きながら規則性に注目**していきましょう．

【解答】

（1） 右図のように樹形図（の一部）を描くと，次のことがわかる．



① 百の位の数は，1か2か3の3通り．

② 十の位の数は，①のそれぞれに対して，①で使った数以外の3通り．［枝が3つに分岐する］

③ 一の位の数は，［それまでの枝分かれ1本1本の各場合について］それまでに使った数以外の2通り．

よって，答えは，3×3×2=**18（通り）**

⇨注 上の樹形図は，百の位の数が2と3の場合を省略していますが，これは，百の位が1の場合と全く同数の枝分かれをするからです．このように，'対等性'（☞p.16）を利用して，適当に樹形図を省略していくことが大切です．

（2） 各桁（百，十，一）ごとに和を考える．

百の位：1と2と3が同数（6個）ずつ．

よって，和は，6×(1+2+3)×100=3600

十の位：1と2と3が同数（4個）ずつで，0が6個

よって，和は，4×(1+2+3)×10=240

一の位：1と2と3が同数（4個）ずつで，0が6個

よって，和は，4×(1+2+3)×1=24

以上より総和は，

3600+240+24=**3864**

［各桁の数が何個であるかは樹形図を見れば，すぐにわかる］

⇨注 上の問題（2）を102+103+…と律義に1つずつたしていくのは大変です．たし方の工夫一つで問題は難しくも易しくもなるのです．

5．樹形図を描きながら考えると，

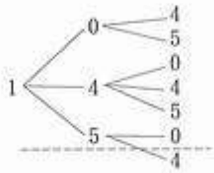
① 1からはじまる樹形図と5からはじまる樹形図の枝分かれの仕方は似ている．

② 4からはじまる樹形図は，（4のカードが2枚あるために）他の場合とは異なる

ということがわかります．

【解答】

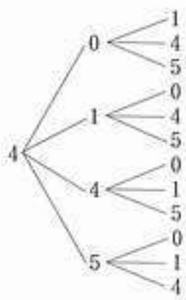
小さい数ほど上になるように，樹形図を描く．（すばやく描けるよう訓練すること）



（1） 7+12+7=26

［樹形図の右はしを数えただけ］

よって，**26（個）**



（2） ------ のところより下を数えればよいので，

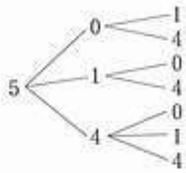
26−6=**20（個）**

（3） 1の位が偶数で，しかも各位の数の和が3の倍数であるものは，（☞注）

144，150，414，450

504，510，540

の**7（個）**



⇨注 各位の数の和が3の倍数であることがもとの数が3の倍数である条件です．また，6の倍数は，「2の倍数」かつ「3の倍数」．

Ⅰ　整理するということ

場合の数の基本は，いち，にい，さん，… と数えることだ．でも，すべてを列挙して，単純に数えていくのは，注意力が不足するとミスをしやすいし，数える対象の数が多いときには，何といっても遅い．

そこで，何とか工夫をして，うまく数えようということになる．その工夫の第1段階が，

整理して数える

ということだ．

たとえば，右①は，表で整理をする場合で，2回さいころをふるようなときは，すべて，こうした表による整理で解決する．(⇨右①)

また，$\boxed{1}$，$\boxed{1}$，$\boxed{2}$，$\boxed{5}$ の4枚のカードから3枚をとって，順に並べて3桁の整数を作るような問題（何通りの異なる整数ができるか）では，右②のように，

樹形図

というものを描く．(⇨右②)

右図の場合は，

1° まず百の位は，$\boxed{1}$か$\boxed{2}$か$\boxed{5}$ と場合分けをし，

2° そのうち，百の位が$\boxed{1}$の場合は，十の位には，$\boxed{1}$，$\boxed{2}$，$\boxed{5}$ の3通りの場合があり，…

というように，場合分けをどんどんくりかえしていくわけである．

場合を分けるごとに，樹の枝のように場合を分岐させていくので，樹形図という名称がついている．

樹形図を素早く描けるようになることは，「場合の数」を学ぶ初歩の段階で，きわめて大切なことで，訓練が必要である．そうした訓練での注意点は次の2つ．

1° どこから場合を分けていくか（上の例について一の位から出発して樹形図を描いてみよ）に常に注意を払う．

2° 少し慣れてきたら，省略できるところは省略する．（右の②では，百の位が$\boxed{2}$の場合と$\boxed{5}$の場合の枝分かれの様子は同じである．こうしたことに気づけば，$\boxed{5}$の場合は省略しても'大丈夫'である．）

*　　*　　*

さて，整理して数える際の最大のポイントは，

基準を決めて整理すること

で，整理の基準を最初に決めないと，うまい整理はできないものである．

たとえば，右の③は，和が10になる3つの自然数の組 (a, b, c)［ただし $a \leq b \leq c$ とする］をすべて，書き出したものだが，まず a が1の場合，次に a が2の場合…… というように，'大きさを基準' に場合を分けている．(⇨右③)

① さいころ（1〜6の目）を2回ふる場合の表．

1回目の1〜6を横に2回目の1〜6をたてに組み合わせて，右のような表を作ると，

$6 \times 6 = 36$（個）

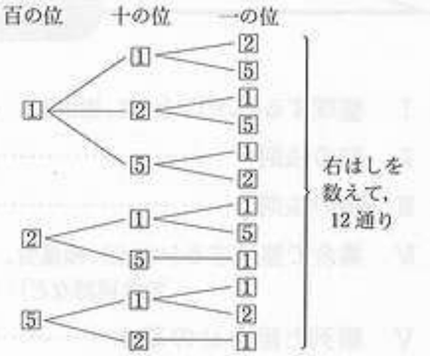
のます目が，すべての場合を尽くすことになるので，数えおとしがない．

②＼①	1	2	3	4	5	6
1					○	
2				○		
3			○			
4		○				
5	○					
6						

［さいころ2回の目の出方の組み合わせの表］

（たとえば，2回の目の和が6になるのは，図の○印をつけたところで，（きれいに規則性が現われ）場合の数は'5通り'である）

② 樹形図



［規則正しく樹形図を描こう．たとえば，上では，各位の数を小さい順に上から書いているので，すべての整数は，上から小さい順に並んでいる］

③ 和が10になる3つの自然数の組 (a, b, c)
［ただし $a \leq b \leq c$］の書き出し方．

$a=1$ のとき，(1, 1, 8)
(1, 2, 7)
(1, 3, 6)
(1, 4, 5)
$a=2$ のとき，(2, 2, 6)
(2, 3, 5)
(2, 4, 4)
$a=3$ のとき，(3, 3, 4)

計8通り

［ポイントは，基準を決めて整理することで，数えもれやダブリをふせぐこと］

Ⅱ　和の法則

Ⅰで言ったように,「整理」には，数えもれや，ダブルカウント（同じものを2度数えてしまう）を防ぐという目的がある．この，

ア　数えもれを防ぐ

イ　ダブルカウントを防ぐ

という2つのことが，場合の数の基本中の基本であって，これらに注意を払うことがまず肝腎なことだ．

特に，イと密接な関係があるのが，右に示した，「和の法則」である．（⇨右①）

①で,「Pであり」かつ「Qである」場合がないとは，

「事柄Pと事柄Qの両方は起こらない」

ということであり，このとき，

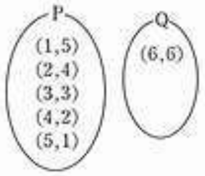
「事柄Pと事柄Qは，排反である」（⇨右例1）

という．ポイントは，**すべての場合を，排反に場合分けしていけば，ダブルカウントは必ず防げる** ということである．

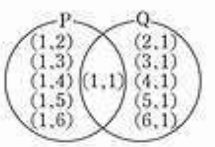
一方，数えもれを防ぐのは，主に注意力によるしかない．

この，和の法則の例1（⇨右）例2（⇨右）を図解すると，それぞれがどうなっているかよくわかる．

［例1の図］



［例2の図］



つまり，例1では2つの集まりPとQには「重なり」がないが，例2では2つの集まりPとQに，(1, 1) という「重なり」(PとQの両方が起こる場合) がある．

①　和の法則

2つの事柄P，Qについて，Pである場合がp通り，Qである場合がq通りある．このとき，「Pであり」，かつ「Qである」場合がないならば，

Pまたは Qである場合の数は，$p+q$（通り）

［例1］

「さいころを2回投げる場合，出た目の数の和が6の倍数になるのは何通りか」

という問いに対しては，次のように考える．

事柄P：出た目の和が6である

事柄Q：出た目の和が12である

の2つの場合は，両方は起こることはないので，排反であり，（和が18以上になることはないので，これですべてをつくしてもいる）$(a,\ b)$ を1回目にa，2回目にbが出たという意味だとすれば，

事柄P ……（1, 5）（2, 4）（3, 3）（4, 2）（5, 1）

事柄Q ……（6, 6）

だから，Pが5通り，Qが1通りで，計6通り．

［例2］

「さいころを2回投げる場合，少なくとも1回は1の目が出る場合の数を求めよ」

という問いに対して，

事柄P：1回目に1が出る（2回目は何でもよい）

事柄Q：2回目に1が出る（1回目は何でもよい）

の6通りずつを単純にたすと，あやまりである．

なぜなら，「1回目に1が出」「2回目も1が出る」というように1つの試行で事柄PとQの両方がともに起こりうるからだ．

（「事柄Pが起こり，かつ事柄Qが起こる」ことがある．）

Ⅲ　積の法則

和の法則に対して，もう1つの大切なポイントがある．それは，積の法則である．（⇨右参照）

ただ，この積の法則には，ちょっとした注意点がある．それは，本（教科書）によっては，右の「PしかもQ」のところを，時間性を強調して，

PとQが同時に起きる

Pがまず起こり，引き続いてQが起きる

という表現がしてあるが，実際には，右の例1（⇨右）を見ればわかるように,「男子3人のうち1人を選ぶ」「女子2人のうち1人を選ぶ」という2つの事柄は，どちらが先に，どちらがあとで起こるということは問題にならない．（どちらを先にしても同時にしてもO.K.）

②　積の法則

2つの事柄P，Qについて，Pである場合がp通り，そのp通りのそれぞれに対して，Qである場合がq通りずつあるとき，

Pが起こりしかもQが起こる場合の数は，pq通り

［例1］

「3人の男子A，B，C，2人の女子D，Eから，男子1人，女子1人の委員計2人を選ぶ場合の数を求めよ」

という問いに対しては，

事柄P：男子を1人選ぶ（3通り）

事柄Q：女子を1人選ぶ（2通り）

に対して，PしかもQが起こるのは，$3\times2=6$（通り）