はじめに

黒木正憲

“数” を意識し学んで始めに出会うのは正の整数で，子供のころから整数にはなじんでいるものですが，その親しいはずの整数は，それを学んでいくにつれ，底知れぬ深さを秘めた性質をもっていることがわかってきます．

まず，整数をやっかいなものとしているものが素数の存在です．2以上の整数で，1と自分自身以外の約数をもたない素数は，それを小さいほうから並べてみると，

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97, …

となりますが，この分布のしかたはたいへん不規則です．この不規則さが整数論をむずかしくさせているのですが，一方，素因数分解でみるように，この素数を利用して，整数の問題をあざやかに解くこともできるのです．整数論はまさに “数学の女王” です．

整数がいろいろとむずかしい性質をもっている以上，整数の問題を解くには，整数についての定理・公式とともにそれらを駆使するテクニックを習得していなければなりません．

たとえば，合同式に例をとってみましょう．

2つの整数 a, b が正の整数 m で割ったときの余りが等しいとき，すなわち，$a-b$ が m で割りきれるとき，a と b とは m を法として合同であるといい，

$$a \equiv b \pmod{m}$$

のようにかきます．整数に対して，

$$a \equiv b,\ c \equiv d \pmod{m}$$

のとき，$ac \equiv bd$，したがって，$a^n \equiv b^n \pmod{m}$ などがなりたちます．(cf. 本文　§15)

［問題］ 33^{100} を35で割った余りを求めよ．

に対して，$33 \equiv -2 \pmod{35}$ ですから，

$$33^{100} \equiv (-2)^{100} \pmod{35} \text{ です．}$$

ここに，$(-2)^5 = -32 \equiv 3 \pmod{35}$ ですから，

$$(-2)^{100} = ((-2)^5)^{20} \equiv 3^{20} \pmod{35}$$

となりますが，　$3^5 = 243 \equiv -2 \pmod{35}$

すると，　$3^{20} = (3^5)^4 \equiv (-2)^4 = 16 \pmod{35}$

したがって，答えは16となります．

つぎの例は整数を2進法で表してみるという方法です．

［問題］ 2^n-1 が31で割りきれるような正の整数 n はどのような値か．

たとえば，10進法で，$10^3-1=999$　ですが，2進法で表すと，　2^n-1 は $111\cdots\cdots1$ (n 個)

となり，　$31=2^5-1$ は 11111 となります．

したがって，題意をみたすような n の値は5の倍数となります．

つぎの例は，3個の巣箱に4羽の鳩がはいっているとき，どれかすくなくとも1つの箱には2羽以上の鳩がはいっているという “鳩の巣原理” の応用です．

［問題］ 1から100までの自然数100個の中から，どのように51個の数を選んでも，その中には一方が他方を割りきるような2つの数の組が存在することを示せ．

1から100までの偶数をそれぞれ商が奇数になるまで2で割れるだけ割っていき，その商の奇数で分類すると1から100までの奇数は50個しかないので1から100までの整数は50通りに分類されます．したがって，1から100までの数から51個を選ぶと，その中には，同じ奇数に分類されるものが少なくとも1組あり，その大きい数は小さい数で割りきれることになります．

たとえば，$12=2\times2\times3$　と　$6=2\times3$　は奇数3の組に分類されますが，12は6で割りきれます．

整数の問題というのはまことに多彩で，難問もあふれています．それに対して適切な解の技法を用意してないと解答に呻吟することになります．

この書は，むずかしいだけにみんなが苦手とする整数問題への的確な解の技法をまとめたものです．この書についてそれらを学び慣れることによって，読者は整数問題が解ける自信を深めていくことでしょう．

どうか，座右の書として愛読してください．

本書の利用法

栗田哲也

◆ 目　的

古来数学は諸科学の女王と呼ばれ，中でも整数論は，有名なドイツの天才数学者ガウスによって，数学の女王と呼ばれました．数学を学ぶ者にとって'整数'は憧れの的であり，最も興味深い対象だったのです．

現在でも数学を学んでいくものが，興味をそそられ，面白さを感じ，自分で工夫して問題を解く力を養うために，'整数'は最も適した分野です．

要するに，'整数'は，数学を学びたての人にとって，頭をきたえ，面白さを感じるために，最も適した素材なのです．

そんなわけで，大学入試，特に難関大学の入試には，かなり多く，整数の問題が出題されます．これは，整数の重要性からみて，当然のことでしょう．

ところが，ここで中学，高校の教科書を見ると，驚くべきことに整数という単元や項目が1つもありません．

その結果，生徒諸君は'整数'について系統だった教育を受けないまま，難しい大学入試問題を解かされるはめになります．'整数'は難しい，苦手だ，という受験生の声をよく耳にしますが，よく習ってもいないものが試験場で解けるわけはないのです．

本書は，そうしたギャップを埋め，大学入試に必要な初等整数論を系統だてて教えることを目的とした，参考書，兼，問題集です．

本書を学ぶことによって，少なくとも，「整数は訳がわからない」という悩みは解消されることでしょう．

◆ 本書の特徴（1）［類書と比べた場合］

類書，とここでいうのは，1°大学入試の参考書，2°一般の（大学入試とは限らない）整数論の概論書を指します．

1°については，従来の参考書にくらべて，系統だった取り扱いをした本だといえるでしょう．

2°については，一般向きの啓蒙書さえ，いわゆる数学に特有な厳密な書き方をしているのに対し，問題を解くという作業を通じながら，自然と大切な概念が把握されるように工夫した構成となっています．また，大学入試に関係がない部分は省いてあります．

要するに，**系統立った整数論の本だが，大学入試までに範囲を限定した**というのが本書の第1の特徴です．

◆ 本書の特徴（2）［整数は楽しい！］

数学には，特定の約束事を学習しないと，問題を全く解けない分野があります．たとえば，積分を習ったことのない人が，∫の記号のついた計算はできません．

従って，天才的な中学生でも，積分の意味を習ったことがなければ，やさしい積分の問題すら解けないのです．

これに対して，整数の問題の大半は，かなり難しい問題でさえ，中学校卒業程度の知識があれば，十分取りくむことができます．

整数問題の難しさは，「長大な約束事を理解しなければならない難しさ」ではなく，「自力で工夫し，考えぬかなければならない難しさ」なのです．

そこで本書では，数ある整数問題の中から「解いて面白い問題」「一度は解いておくべきタイプの問題」「あるポイントを理解するのに最適な問題」で典型的なものをほとんどもれなく集めました．

自分の力で解いたことのないポイントは，仮に理解してもすぐ忘れてしまうもの．

楽しく問題を解きながら自然とポイントが身につくような，そんな問題をぜいたくに配してあるのです．

◆ 対　象

本書を読んでもらう読者層として想定しているのは，次の2通りのタイプの方です．

①大学入試の整数問題に自信を持ちたい受験生．

②数学に自信のある中学上級生，高1，高2生で，整数について，突っこんだ学習をしたい人．

①の人についていえば，系統立った学習をしたことのない大学受験生は，基礎が穴だらけの可能性が非常に高いのです．このような人が第3部のような本格的な試験

問題に直面すると，

　　まず，難しくてわからないと思い，
　　次に，何とかやってみようとし，
　　大変な苦労のあげく理解したような気になり，
　　でも結局自力で解けるレベルには達しない，
　　従って自信を失なっていく，

という悪循環をするのがオチです．

そういう人は急がばまわれで，第1部のような系統立った問題を順に解いていくと，意外にはやく第3部のような問題もわかってきます．

逆に，大学受験の本格的な問題ばかりいくらくりかえしても，空回りするばかりで本当の実力はつかないでしょう．

本書は，やる気はあるが入試問題の難しさの前に意欲が空回りしている受験生に「系統学習」という特効薬を与えているのです．

②の人についていえば，数学好きの人には，若いうちから数学の1番おいしいところを，どんどん味わってほしいということです．中学入試の上級の整数問題を解いたことのある中学生なら，第1部の問題は十分手をつけられるレベルですし，自分にとってやや難しめの面白い問題を工夫しながら自力で解くことが，数学を学習する王道なのです．先にもいいましたが，**本書の中には，昔から定評のある面白い問題，解きがいのある問題は，ほとんどもれなくおさめられています．それらの問題を解くことによって，数学の面白さを存分に味わってみませんか？**（もちろん将来的には受験にも大いに役立ちます）

◆ 構　成

本書は，

① 第1部　　系統別基礎問題集
② 第2部　　初等整数論の重要部分の概説
③ 第3部　　大学入試の実戦演習
④ 第4部　　興味深い問題の演習

の4部構成になっています．

そこで，①から順に説明していきます．

① 第1部

系統的なテーマ別の，16章（各1ページ）から成る問題篇と，1テーマあたり2ページ，計32ページの解答篇で構成されています．

1テーマ（1章分）の問題は，1ページ約4〜6題の標準問題と，その下の「研究問題」を含みます．

問題の難易度は，右上に表示してあり，

　Aはやさしめ，Bは標準，Cはやや難しめ
　Dは難問　を，それぞれ表します．

また，Pはパターン問題であることを表し，P(A，B)は，そのパターンを知っていればAランクだが，知らなければBランクであることを表します．

問題の左側に書かれているコメント☆は，ヒントになりうるコメントを，★はそれ以外のコメントであることを表します．

下の研究問題は，やや難しめなので，余裕のあるときに取りくんでみてください．

解答篇の⇨注は補足説明を，☞p.〜はp.〜を参照してください，という意味を表します．

問題が解けた人も，この解答篇は隅々まで読んで，更に高度な考え方や，きれいなやり方を身につけましょう．

第1部の問題には，中，高，大の入試やその他の問題の中から，有名な問題（1度は目にしておきたい問題），興味深く解きがいのある問題，本質をついていて，あるポイントを理解するのに絶好の問題が，精選されています．第1部を学習するだけでも，普通の大学入試の大部分は解けるようになります．（もちろん整数分野に限る）

ただし§15の合同式は，見慣れない≡，mod　といった記号を含むので，第2部p.60〜61を読んでから取りかかりましょう．

② 第2部

大学入試（$+\alpha$）を念頭においた初等整数論の概説です．原則としては，左段に本文（解説）が，右段に具体例や図がのっていますが，左，右の段をまとめたところは，普通に上から読んでください．

内容的には，かなり高度なものが多いので，指定された作業を行なったり（実験をしたり），具体例を自分で考えたりしながら，ゆっくりと読み進んでいきましょう．

時間のない人は，あえてとばしても構いませんが，一部の問題を解くことで得られた知識，手筋，概念などを有機的に関連づけ，更に上の段階に進みたい人には，ぜひ読んでもらいたいところです．

③ 第3部

実際の大学入試問題のうち，解きがいのある本格的な問題，よく出題される問題を，類題ごとに分類・整理し，くわしい解答と，背景の解説などをつけたのが第3部です．

ここがすらすら解けるようになれば，受験生としては，最高レベルの実力の持ち主といえるでしょう．

この章では，特に入試問題の背景となりやすいテーマが18並んでおり，1つのテーマは，

例題（代表的問題）

関連問題と背景の解説

といった二段階で，学習するようになっています．

問題はほとんどが実際に大学入試で出題されたものですが，はじめてこうした問題にあたる人は，その難しさに呆然とする人が多いかもしれません．

制限時間内で解答しなければならない大学入試にあっては，それらの問題の背景を多少なりとも知っていなければ，方針を立てるだけでも時間をくって沈没する場合が多いと思われます．

入試でそうした悲劇を起こさないためには，（特に難関校を受ける人は）難しくとも，第3部で扱った程度の背景知識は身につけてほしいところです．

なお，第3部のあとに，補足として，第1部，第3部の問題のうち，特に有力な別解や背景があるものには，それを附記しました．

整数問題は，特に別解が多い分野で，本書の解法と君たちの解法が異なっていながら，どちらも正解であるというような例が他にも沢山でてくることと思われます．

④ 第4部

第4部は，いってみれば，'おまけ' です．初等整数論の理解に欠かせない問題，昔から定評のある面白い問題，「大学への数学」の学力コンテストで出題したオリジナルな難問，大学入試問題のうち興味深いもの，数学オリンピックの予選問題などから，第1部〜第3部でもれた問題を集めました．

1題1題が，単に解くだけではもったいないような質をもっています．余裕のある人は，是非これらの1題1題をもとに，その結果を更に一般化したりして，'研究' をしてもらいたいところです．

◆ 学習の目安

一まず，以下の3通りのタイプの人に分けて考えてみます．

(1) 自信のある大学受験生

第3部の問題に挑戦しても結構です．ただし，相当自信があっても手がつかないほど難しい可能性もあるので，そのような場合は，第1部に戻ってください．

(2) 自信のあまりない大学受験生

第1部のうち，§5，§9，§14，§16の4章をぬかした残り12章（研究問題を除く），に，一日1章ぐらいのペースで集中的にあたり，自分のウィークポイントを補強してください．ここが一通りできるようになれば，第3部に進んでも，それほど無理はないはずです．

(3) 数学好きな中学上級〜高2生

第1部から順に進んでみてください．また第2部も必ず読んでほしいところです．第3部には式のとりあつかいに難しいところがあるので，受験生になってからやっても構わないでしょう．（もちろん，全てやっても構いませんが）

この本を経由して，整数の世界に興味をもち，更に深い勉強を志す人があれば，それは我々にとって望外の喜びです．

目　次

§1 素因数分解の利用
(1) 約数の個数

□1 P（A，B） □2 P（A，B）
□3 B □4 B

☆約数の個数や総和の問題は，ワンパターンです．(3)ではかけると1500になるペアを考えましょう．

1. 1500の約数について，次の各問いに答えよ．
（1） 約数の総和を求めよ．
（2） 21と互いに素な（1以外に公約数をもたない）約数はいくつあるか．
（3） 約数をすべてかけるといくつになるか．

☆約数の個数が奇数個ということは，その整数が平方数であるということです．(2)のような数を素因数分解したときの形は？

2. 次の各問いに答えよ．
（1） 1から100までの整数のうちに，約数の個数が偶数個の整数はいくつあるか．
（2） 6個の約数をもつ自然数のうち，最小のものを求めよ．

☆言いかえをすると約数の個数の問題になって，あっというまに片がつきます．頻出の趣向（味つけ）をもった，一度は当たっておきたい問題です．

3. $\boxed{1}$ ～ $\boxed{200}$ まで，1から200までの整数を表(おもて)にかいたカードが並べられている．このカードに全て表の状態からはじめて次の200個の操作をする．

操作1． 1の倍数のカードをすべてひっくりかえす．
操作2． 2の倍数のカードをすべてひっくりかえす．
⋮
操作n． nの倍数のカードをすべてひっくりかえす．
⋮
操作200． 200の倍数のカードをすべてひっくりかえす．

操作が終了したとき，表向きになっているカードは何枚あるか．

☆約数の逆数にもとの整数をかけると，やはり約数になります．

4. ある整数の約数をすべてたすと168になり，約数の逆数をすべてたすと2.8になる．この整数を求めよ．

研究問題

（1） 90を連続する自然数の和（1つだけの場合も含む）で表す方法は何通りあるか．
（2） $N=2^a\times3^b\times5^c$とするとき，Nを連続する自然数の和（1つだけの場合も含む）で表す方法は何通りあるか．

解答篇

§1　素因数分解の利用

(1)　約数の個数

1. まずは約数の個数や総和についてのおきまりの問題です.

【解答】

1500 を素因数分解すると，$2^2 \times 3 \times 5^3$
となる.

（1）　A グループ　B グループ　C グループ

$$\begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2^2 \end{Bmatrix} \qquad \begin{Bmatrix} 1 \\ 3 \end{Bmatrix} \qquad \begin{Bmatrix} 1 \\ 5 \\ 5^2 \\ 5^3 \end{Bmatrix}$$

A, B, C の 3 つのグループのそれぞれから，1 つずつの要素を選んでかけあわせると，1500 の約数が 1 つできる.（例えば，図の矢印のように選んでかけあわせると，$2^2 \times 3 \times 5 = 60$ ができるが，これは 1500 の約数）

そこで組み合わせ方の数を考えて，

$3 \times 2 \times 4 = 24$（個）

の約数ができる.

これらの 1 つ 1 つの約数は，

$(1+2+2^2)(1+3)(1+5+5^2+5^3)$ …………①

を展開したときにできる 1 つ 1 つの項である.

よって約数の総和は①式の値に等しく，

① $= 7 \times 4 \times 156 =$ **4368**

（2）　$21 = 3 \times 7$ なので 3 の倍数でないものを数えればよい．そこで

$$\begin{array}{ccc} \text{A} & \text{B} & \text{C} \\ \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2^2 \end{Bmatrix} & \begin{Bmatrix} 1 \\ 3 \end{Bmatrix} & \begin{Bmatrix} 1 \\ 5 \\ 5^2 \\ 5^3 \end{Bmatrix} \end{array}$$

のうち，B グループから 3 を取り除いて組み合わせればよいので，

$3 \times 1 \times 4 =$ **12**（個）

（3）　約数を小さい順に書き並べると，

a という約数があれば $\dfrac{1500}{a}$ も約数なので

1, 2, 3, 4, ………, 375, 500, 750, 1500

のようになり，これらを上図のように，かけると 1500 になる 2 つずつのペアにできる.

約数は全部で 24 個あるので，かけると 1500 になるペアは，$24 \div 2 = 12$（組）できる.

よって答えは，$\mathbf{1500^{12}}$

2. 一般にある整数 N が

$$N = a^p \times b^q \times c^r \times \cdots$$

の形に素因数分解されるとき，N の約数の個数は，$(p+1)(q+1)(r+1)\cdots$ です．本問はこの事実（☞p. 56）を最大限に応用した頻出問題です.

【解答】

（1）　$N = a^p \times b^q \times c^r \times \cdots$ の約数の個数は，

$(p+1)(q+1)(r+1)$ ………　☆

よって約数の個数（＝☆式の値）が奇数となるためには，p, q, r, … がすべて偶数であることが条件.

よって，

（ア）約数の個数が奇数

$\Leftrightarrow p$, q, r, … はすべて偶数

$\Leftrightarrow N = a^p \times b^q \times c^r \times \cdots$ は平方数

（イ）約数の個数が偶数

$\Leftrightarrow N$ は平方数（1^2, 2^2, 3^2, 4^2, …）以外

という言いかえができる.

答えは，1〜100 の 100 個から，1^2, 2^2, …, 10^2 の 10 個の平方数を除いて，

$100 - 10 =$ **90**（個）

（2）　素因数分解したときの形が，

①　m^5　　（m は素数）

②　$m \times n^2$　（m, n は異なる素数）

のどちらかの形をした整数は，☆より約数の個数が 6 個になる．このうち，

①のタイプの最小のものは，$2^5 = 32$

②のタイプの最小のものは，$3 \times 2^2 = 12$

なので，小さい方をとって答えは **12**

3. 例えばカード $\boxed{40}$ は最終的に何回ひっくりかえされているか，具体的に考えてみましょう.

Ⅰ　素因数分解

①　**素数（定義）**

1とその数自身の2つの数によってしか割りきれない数を素数という．

②　**エラトステネスのふるい（➡図1）**

図1のように整数を小さい順に1から並べる．まず2は素数である．ここで2に○をつけ 次に2の倍数を×印で消す．残った中で最小の数3は素数である．そこで3に○をつけ3の倍数を×で消す．さらに残った数の中の最小の数5は素数である．そこで，5の倍数を×印で消す…

このような操作をくりかえして，素数を次々と発見することができる．この操作のことを発見したギリシャの数学者の名に因んでエラトステネスのふるいと呼ぶ．

③　**素因数分解の一意性**

あらゆる自然数について，その数を素因数分解した結果は1通りしかない．（厳密には これは整数論の基本となることで証明を要するが，感覚的にはあたりまえのことであろうし，深く考えすぎる必要はない）

④　**素因数の発見法**

自然数nの素因数を見つけるには，$\sqrt{n}$以下の素因数について調べれば十分である．$\sqrt{n}$より大きい素因数については，〰〰を行なったあとで実際に素因数分解すれば自然に出てくる．（➡図2）

⑤　**素数の無限性**　（右の証明を参照のこと）

素数は無限に多く存在する（上限がない）．

Ⅱ　素因数分解の利用（1）

①　**約数の個数**

ある自然数nが，$n=a_1^{p_1}a_2^{p_2}\cdots a_m^{p_m}$（$a_1$～$a_m$は素数）と表されたとすると，$n$の約数の個数は，

$(p_1+1)(p_2+1)\cdots(p_m+1)$　　　（➡図3）

図3の，$n=180$の約数の場合，

素因数2を　0個，1個，2個のどれか

素因数3を　0個，1個，2個のどれか

素因数5を　0個，1個　のどちらか

をとってかけあわせると1つの約数ができるので，約数の個数は，$3\times3\times2=18$（個）

②　**約数の総和**

①のnについて，nの約数の総和は，

$$(1+a_1+\cdots+a_1^{p_1})(1+a_2+\cdots+a_2^{p_2})\cdots(1+a_m+\cdots+a_m^{p_m})$$

$n=180$のときは，図3の（＊）式の値で546

図1　エラトステネスのふるい（1～60まで，○印が素数）

1	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~	~~10~~	11	~~12~~	13	~~14~~	~~15~~
~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~	~~21~~	~~22~~	23	~~24~~	~~25~~	~~26~~	~~27~~	~~28~~	29	~~30~~
31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	~~35~~	~~36~~	37	~~38~~	~~39~~	~~40~~	41	~~42~~	43	~~44~~	~~45~~
~~46~~	47	~~48~~	~~49~~	~~50~~	~~51~~	~~52~~	53	~~54~~	~~55~~	~~56~~	~~57~~	~~58~~	59	~~60~~

図2　整数nの約数の書き出し方（$n=60$の場合）

1　2　3　4　5　6　10　12　15　20　30　60

このように，かけて60になるペアに分解できる．

このペアに属する2つの数のうち，一方は$\sqrt{60}$以下だから，整数nを素因数分解するには，$\sqrt{n}$以下の素因数について調べればよいわけである．

（例）　437の素因数分解

$\sqrt{437}=20.\cdots$ だから，20までの素数すべてをためすことにより，$437=19\times23$を得る．

（19が見つかれば23は自然に出てくる）

［証明］（素数が無限個あることを背理法によって示す）

素数がもしも有限であれば，最大の素数が存在する．それまでの素数を小さい順に

$a_1(=2)$，$a_2(=3)$，…，a_n（最大の素数）として，

$N=a_1a_2\cdots a_n+1$　……………………………①

を考える．

(1)　Nが素数なら，a_nより大きい素数が存在することになって仮定に矛盾する．

(2)　Nが合成数なら，Nは①式の形からしてa_1～a_nのいずれでも割り切れないから，a_nより大きな素数で割り切れることになり，やはり仮定に矛盾する．

以上（1）（2）より，素数は無限に存在する．

図3．$n=180$（$=2^2\times3^2\times5$）の約数の個数

$(1+2+2^2)(1+3+3^2)(1+5)$ …（＊）を展開したときの1項1項が1つ1つの約数に対応する．

（図の矢印のようにくみあわせると，$2\times3^2=18$という約数ができる）

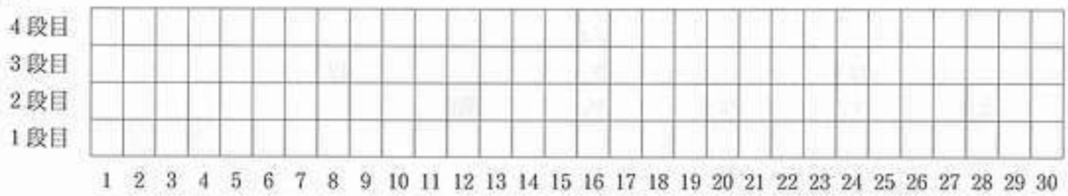
③　$n!(=n(n-1)(n-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1)$ に含まれる素因数 p（$2\leqq p\leqq n$）の個数は

［公式］　**$n!$ に含まれる素因数 p の個数** $=\left[\dfrac{n}{p}\right]+\left[\dfrac{n}{p^2}\right]+\cdots\cdots$　　となる．

ただし，ここで記号［　］はガウスの記号といって，$[x]$ は，x 以下の最大の整数を表す記号である．これは，具体例で理解した方がわかりやすいので，下の図を参照のこと．

（例）　30!（$=30\times 29\times 28\times\cdots\times 3\times 2\times 1$）に含まれる素因数2の個数

図4



上の図は，1〜30の各数が，素因数2を幾つ含んでいるかを1〜30の数ごとに表した図である．2を1つ以上含む数は2つごとに，2を2つ以上含む数は4つごとに，2を3つ以上含む数は8つごとに周期的に並ぶ．

そこで1段目の網目の個数は $\left[\dfrac{30}{2}\right]=15$ 個，2段目の網目の個数は $\left[\dfrac{30}{4}\right]=7$ 個，…　などとなる．

（たてに数えるのではなく，横に各段ごとに数える！）

よって30!が含む素因数2の個数は $\left[\dfrac{30}{2}\right]+\left[\dfrac{30}{4}\right]+\left[\dfrac{30}{8}\right]+\left[\dfrac{30}{16}\right]=26$ 個　である．（☞p. 25）

Ⅲ　素因数分解の利用（2）

①　**G.C.M.**（最大公約数）を求める．

素因数分解された各素数の指数について，最小のものをとっていけばよい．（右に具体例）

②　**L.C.M.**（最小公倍数）を求める．

素因数分解された各素数の指数について，最大のものをとっていけばよい．（右に具体例）

③　2数 a，b の最大公約数を G，最小公倍数を L とするとき，関係式

$$ab=GL$$

が成立する．

［例］　$540(=2^2\times 3^3\times 5)$　　$(=2^2\times 3^3\times 5^1\times 7^0)$

$1134(=2\ \times 3^4\times 7)$　　$(=2^1\times 3^4\times 5^0\times 7^1)$

$504(=2^3\times 3^2\times 7)$　　$(=2^3\times 3^2\times 5^0\times 7^1)$

の最大公約数は，2について最小の指数は1，3についての最小の指数は2，5と7については最小の指数は0だから，　$2\times 3^2=18$

最小公倍数は，2について最大の指数は3，3について最大の指数は4，5と7について最大の指数は1だから，　$2^3\times 3^4\times 5\times 7=22680$

Ⅳ　約数のペア・約数の積

自然数 n の約数を小さい順に書き並べ，$a_1\sim a_m$　とすると，これらの約数は，$a_1\times a_m=n$，$a_2\times a_{m-1}=n$，…のように積が n となるペアに分けられていく．

n が平方数の場合は，ペアがくめない約数 $\sqrt{n}$ が存在するので約数の個数は奇数個，n が平方数でない場合は約数の個数は偶数個だが，どちらの場合も，約数すべての積は $\sqrt{n^m}$（m は約数の個数）となる．

［例］

(1) $n=60$（≠平方数）のとき，約数を書き出すと，

1　2　3　4　5　6　10　12　15　20　30　60

かけて60になるペアが6組

(2) $n=36$（＝平方数）のとき，約数を書き出すと，

1　2　3　4　6　9　12　18　36

かけて36になるペアが4組と，6（$=\sqrt{36}$）が1つ