はじめに

黒木正憲

数学の教科書において問題とその解きかたを練習するときは，その問題をあつかっているところで述べられている定理・公式を用いてそれを解くことになりましょう．

たとえば，3角関数のところであつかっている問題ならば，3角関数の定理・公式を用いて，数列のところであつかっている問題ならば，数列の定理・公式を用いて解くというぐあいです．しかし，教科書を離れて問題を解くときには，自分のもっている数学の知識をフルに活用して解いていいわけです．

一般に，数学の問題というのは，それに対していろんな眺めかたができます．図形的に眺めてみるとか，方程式として見るとか，関数として考えてみるとか，複素平面上にひきうつしてみるとか，などなどひとつの問題を解くための眺めかたというのはいろいろとあるわけです．

そして，どのような眺めかたをするかで，問題の解きかたは，やさしくも，むずかしくもなるのです．

そういう発想の自由さが，数学の問題を解くのをむずかしくさせているし，また，おもしろくもさせているのです．問題の眺めかたの例をあげてみましょう．

問題1　x を実数とするとき，

$$f(x)=\sqrt{x^2-2x+2}+\sqrt{x^2-6x+13}$$

の最小値を求めよ．

これに対し，根号を外そうとして平方したりするとやっかいなことになります．そこで，これを

$$f(x)=\sqrt{(x-1)^2+(0-1)^2}+\sqrt{(x-3)^2+(0+2)^2}$$

とかいて，図形的な意味を考えると，これは，直交座標平面において，x 軸上の点 $(x,\ 0)$ から，点 $(1,\ 1)$ と点 $(3,\ -2)$ への距離の和と眺めることができます．

すると，2点 $(1,\ 1)$ と $(3,\ -2)$ 間の距離が求める最小値ということになります．

問題2　xy 平面上の3本の直線

$$ax+by=1,\ cx+dy=1,\ ex+fy=1$$

が1点で交わるとき，3点 $(a,\ b)$，$(c,\ d)$，$(e,\ f)$ は1直線上にあることを証明せよ．

この問題に対して，はじめの2直線の交点を求め，その点をあとの直線が通るとするのは，いかにも計算がめんどうです．そこで，視点を変えて，3直線が交わる1点をPとし，$A(a,\ b)$，$C(c,\ d)$，$E(e,\ f)$ とすれば，内積 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OE}=1$

となり，内積の図形上の意味から，座標の原点をOとすると，点C，Eは点AからOPへの垂線上に並ぶことから問題は証明されます．

このように，数学の問題というのは，どのような視点でもってそれを眺めるかで，解く苦労の差が現れます．

そして，めんどうな解法におちいると，計算ちがいもおこしがちです．そこで，数学の問題を前にしたらまず，どんな視点から問題を解くのが最善で最簡であるかと，自分のもっている知識をフルに動員して考えるべきです．しかし，そのような最もいい解法を見つける判断力は，教科書をひととおり勉強したぐらいで身につくものではありません．それには，そのような適切な解法を学ばしてくれる書物により，みずから数学への視野を拡げ，視点を高めることです．この書物は，まさにそれを意図した最適の書です．問題というのは，的確な意味をとらえることによって，いかに簡単に処理されていくか，一題，一題と読みすすむにつれて，目が開かれ数学への自信がついてくるのを感じることでしょう．

本書の利用法

栗田哲也

◆ 利用目的・対象

本書は，2つの目的を持って編まれた大学受験用の参考書です．その2つの目的とは，

- 将来難関大学を受験する人が高度な基礎力を養成するのに役立つ．
- 公式にあてはめて解くのではなく，式の意味を考えながら解く力を養う．

の2つです．従って本書は，

① 短期間で応用力の素となる手法や概念を身につけたい高3・浪人生．

② 高1～2年生の内容について教科書程度の理解はしたが，今1つ問題相互の有機的な関連がわからない，高1・高2の上位生．

に，特に役立ちます．

更に①，②の人の中でも特に，次のような壁に突き当たっている人に効果的です．

③ 公式を組みあわせれば問題が解けることもあるけれど，何でそのような解き方をするのかはわからないし，問題の意味もよくわからないような気がする．従って，応用力がないと感じている人．

④ 計算主体で多大なエネルギーと時間を費やせば問題は解けるけれど，自分には発想力がないと感じている人．

⑤ いろいろな参考書にのっているようなエレガントな解法がどのようなところから生まれるか系統立って知りたい人．

◆ レベル

本書は決してやさしい問題集ではないはずですが，**第一部におさめられている問題は(例外を除いて)標準的なものがほとんどです．**

野球でバッティングのトレーニングをするためには，プロの選手でも'素振り'を欠かしませんが，本書の第一部におさめてある問題のほとんどは'素振り'用の問題なので一見難しく思えないわけです．(素振りの本当の難しさがわかるようになれば一人前のプロでしょう．)

従って，**自分のレベルに応じた'素振り'が可能だという意味では本書は様々なレベルの人に役立ちます**が，教科書的な事項がまったくわかっていない人にとっては，この本は猫に小判(？)となってしまいます．

◆ 分野

本書におさめられた問題のすべては，式の処理と，'目'による視覚的な理解とを連動させながら解く問題です．分野はグラフや図形，最大・最小，軌跡・領域，方程式の解の各分野にまたがります．

言いかえれば，**本書は数Ⅰ，Ⅱの関数，方程式，座標幾何の分野を，教科書とは異なった視点からまとめたものです．**

中でも特に強調したのは，**式の背後にひそむ視覚的な意味を，様々な形でとりだしたことで，**このことが本書の最大の特徴といえるかもしれません．

◆ 本書の特徴(1)

本書の最もユニークな部分
部にあるといえるでしょう．
おさめられた問題のほとんど

短答問題

としたことが本書のユニーク
す．

では短答問題とは何かとい

- 1つのポイントを強烈
含んだ短い問題
- 従って，印象に残りや
題
- 枝葉をきりおとして，
も必要最小限にした問題

というのがその特徴です．

そこで，長所としては，

- 復習のとき，ポイン
イメージ(問題の核心部
い浮かべやすい．

ということになります．で
書は，復習のときにこそ，
を最大に発揮します．

◆ 本書の特徴(2)

本書のもう1つの特徴は，
な理解を重視したことです．
初学者は，書物を読むときに
式の羅列と長大な論理展開を
に精一杯で，数式の背後にひ
いる意味はわからず，部分的
は理解しても全体の論理展開
は見失っている傾向が強いよ
従って本書では，

**難しい概念ほど，素朴な
をもとにイメージ化する
解しやすい**

という観点から，厳密な論理

素朴な感覚的理解を重視した解説がしてあります．そのために特に，

- 図による視覚的理解
- たとえによる直感的理解

を多用してあります．

◆ 本書の構成について

本書は，

① 準公式集
② 第一部（短答問題集）
③ 第二部（精選問題集）

の３つの部分から成り立っています．このうち，**最も重要な部分は第一部**です．

とりあえず①から順を追って説明すると，

① 準公式集

本書を読むのに必要な公式や概念について，簡単にまとめてあります．ただ，これらの準公式は，教科書を少し越える程度のものも含みますので，はじめから知っている必要はありません．第一部の問題にとりかかる前に，一通りぱらぱらとページを繰って，どのくらい知っているか，どのくらい理解できるか，おおよその確認をするくらいで結構です．ただし，第一部の学習が一通り終わったら，この部分をまとめの意味で通読してみて下さい．

第一部との関連は，

Ⅰが第一部１章～４章
Ⅱが　５章～８章
Ⅲが　９章～13章
Ⅳが　14章～17章

にほぼ相当します．

② 第一部

第一部は問題篇と解説篇にわかれます．本書の最重要部分です．

●問題篇

１ページが１章分に相当し，その章の表題に即した短答問題が何題か並んでいます．

問題の中で＊の印がついたものは，高２までの範囲では解けないものか，やや程度が高い問題なので，自信のない人は後まわしにして結構です．

問題の下の

コメント，ヒント，情報……

とあるところは，ヒントや勉強法を中心にして，軽く読めるようになっています．君たちが自分の勉強法を見つける上でヒントになることがあれば幸いですが，軽く読み飛ばしても構いません．

♥マークは，そこに書かれていることが問題のヒントであること
♠マークは，それ以外のコメントであること

を表します．

●解答篇

４ページが１章分に相当します．各ページの左側数行分は図のスペースになっており，右側には問題（再掲）と【方針】【解答】があります．

【方針】はその問題を解く上での着想や大筋が書いてあるので，ここをちらっと見てから再度問題にアタックするのもよいでしょう．

【解答】は，その章で学んでもらいたい手法をメインにしてありますが，紙幅の許す限り【別解】もつけました．実際に君たちが問題を解く場合には，様々な解法によって解くことでしょうし，自力で解けるということは，無論必要なことだからです．でも先にも述べた通り，本書の第一部は，野球の‘素振り’にあたります．**自己流の‘素振り’だけでなく，長年の経験に裏打ちされた‘素振り’の型を学んで，しっかりとした基礎を身につけることが大切です．**

解答は，解説も交えて書いてあるので，やや冗長になっています．**実際に君たちが書く答案は，論理展開さえしっかり相手にわかるように書いてあれば，もっと簡潔で構いません．**

［左側の図］は，大変重要な部分で，あとで復習をするときに役立ててほしいところです．**復習の際はこの図を見ながら，解答のあらすじ（骨組）を思いうかべる訓練をしてみてください．**問題の意味を考える思考の幅がぐんと広くなるはずです．

何章かの末尾にある［基本の徹底理解］は逆手流，２変数関数の扱い方などと言った基本的な手法について書いてあるので，意味がわからず問題を機械的に解いていた人には是非ともくわしく読んでほしいコーナーです．

その他，☞は別の箇所との連動を，⇨注は簡単な注釈を，【発展】はやや高度な解説を，【参考】は高度な事項に軽くふれる程度の解説

を表します．

③ 第二部

①の準公式集や②の第一部の問題が十分にわかり，自力で大学入試上級(中級までは第一部で大丈夫)の問題を解いてみたい人のための挑戦コーナーです．

問題は，月刊誌「大学への数学」の学力コンテストの中から本書のテーマに関係あるものをよりすぐったものをベースにし，さらに東大・京大等の難関校から名問を選んで編集してあります．

一問一問が重厚な問題で，一筋縄ではいかないはずです（これが簡単に思えれば大学入試は安心です）が，こうした問題を長い時間かけて，自力で解ききるのも，数学の重要な勉強法です．

第一部が‘素振り’であるのに対して，第二部は‘実戦’であり，そこでは 自力でやりぬく ことが何よりも求められます．

この第二部がかなり解けるようになれば，君の実力は，かなりのものといえるでしょう．

◆ インデックス

本書の終わりの4ページは，本書に登場する様々な概念や手法の目次になっています．この目次は，本書の中のどこにその概念が登場するかを示すだけでなく，「大学への数学」の刊行物のうち「1対1対応の演習」シリーズに関連問題があれば，それも明示してありますので，既にそれらの本をお持ちの方で関連問題を更に解いてみたい人は，それらの該当ページを参照してください．

ただし，他書と本書は異なった視点からまとめられているので，本書にあって他書にない項目(やその逆)もあります．正射影ベクトルについては，本書では前提としてありますが，教科書にはない事項なのでくわしく知りたい方は，「1対1対応の演習／数B」p.17や「教科書Next／ベクトルの集中講義」§19などを参照してください．

◆ 学習計画の一例

ある本が与えられたとき，その本でどのように勉強を組み立てるかは個人差もあるでしょうから一概には言えませんが，下に，一まず数Ⅰ，A 数Ⅱ，Bが既習の人のおよその目安を書いておきますので，参考にしてください．

① 利用法，準公式のまとめをざっと読む．
準公式のまとめがあまりわからなくとも，第一部に進んでよい．

② 第一部の一章分の問題5〜6題に1時間30分程度の制限時間を設けて，テスト形式で取りくんでみる．

③ 第一部の解答篇を通読する．
【発展】や【参考】も読む．
②，③の一セットを，2日ぐらいで集中して行うのが望ましく効率もよいだろうが，第11章ぐらいからは少し息が切れるのが普通だろう．

④ 一通り第一部が終わったら，問題を読んで解答の骨格を思いうかべる訓練をすることを目標に，何度も復習する．一度目に理解が不十分であったところなどは，再度挑戦する．
この④の過程を重視したところが本書の特徴なので，復習は入念に／

⑤ 余裕のある人は第二部に進み，一問一問をじっくり解く．これらの一問一問は，それぞれが数問分に匹敵する価値をもった問題なので，すぐ解答を見ずに，自力で解く．

この②〜④の過程がメインですが，これは，ほぼ二ヵ月ぐらいでクリアできると思われます．（毎日二時間勉強できる場合）

尤も個人差もあり，一日の勉強量やそれまでにつちかってきた素地もちがうでしょうから，上記の目安を参考に，あくまで本書征服のプランを自分で組み立ててください．

以上のように，従来の参考書・問題集とはかなり異った工夫をいろいろとしてみた，つまり書き手の側も目一杯にチャレンジした参考書です．

君たち読み手の側も目一杯チャレンジして数学力を向上させてください．

［注］ 本書では「整関数」という用語を使いましたが，これは多項式で表される関数のことです．

目　次

§1 図形量のもつ意味(1)　距離

問題 1

$f(x)=|x-1|+|x-2|+|x-3|+|x-4|+|x-5|+|x-6|$

の最小値を求め，最小値を与える x の値をすべて求めよ．

問題 2

$f(x)=|x^2-x-k|$ とするとき，$0\leqq x\leqq 1$ における $f(x)$ の最大値を最小にするような k の値を求めよ．

問題 3

x，y が実数値をとりながら変化するとき，

$\dfrac{3x+4y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ の最大値と最小値を求めよ．

問題 4

x を実数とするとき，

$f(x)=\sqrt{x^2-2x+2}+\sqrt{x^2-6x+13}$ の最小値を求めよ．

問題 5

実数 x，y が $y\geqq x^2+x-1$ を満たすとき，

x^2+y^2-8x のとる値の範囲を求めよ．

問題 6

円①：$x^2+y^2=1$

円②：$(x-2)^2+(y-3)^2=4$

とする．点Pから円①，②へ引いた接線の長さが等しくなるような点Pの軌跡の方程式を求めよ．

コメント　ヒント　情報　勉強の仕方　つぶやき…

上の問題のヒントになるかもしれないコメントには，♥マークがつけてあります．

♠ 君たちが実際に高校数学の問題にあたるとき，まず最初に突きあたる壁は，‘ヘンテコリンで面倒そうな式’に嫌気がさすことではないでしょうか．

でも，一見‘ヘンテコリン’な式も，よく見るとそれぞれがユニークな意味をもち，味わい深い顔をしているものなのです．

特に，1つの式が何らかの‘図形量’を表している場合，その問題を図形的にいいかえることによって，直観的に解けることも少なくありません．

第1章では，そうした代表的な例として，‘距離を表す式’を取りあげました．

♥ まずは，式の形から自分が何を連想できるか，考えてください．

おそろしげな顔をしている，絶対値 $|\ |$ も，距離を表すことに注目できればラクに解けることがあります．（もちろん絶対値の問題がすべて距離ではない）

でも，問題1はそれですぐにわかっても，問題2となると，すぐに距離に結びつけるのは難しいかもしれません．また，図形で考えることに慣れない人にとっては，‘最大値を最小に……’のところがうまくわからないで苦労しそうです．最大値は k の式で表せて（k の関数），その値を最小にする k の値を求めればよいということですね．

♠ 問題3は，いろいろなやり方があります．自信がある人は，複数のやり方で解けるかどうか試してみましょう．2つ以上のやり方で解けた人は，なかなかの実力です．

♠ 問題4は，筆者にとって思い出深い問題．計算だけで解こうとして，深みにはまり，答えを聞いて，「何だ，これはほとんどパズルじゃないか」と怒った記憶があります．数Ⅲの微分を知っている人もまずは微分する前に，ぐっと式をにらんで，式の意味を考えてください．

問題5は，数Ⅱの微分の知識が要るので習っていない人は避けて通って結構です．

問題6は，難しくはないかもしれませんが，解いたあと解答を見て，あっけなく答えが出ることに驚くかも．こういう問題の面白味がわかるようになれば，君の数学力はまず一安心です．

§2 図形量のもつ意味(2)　傾き・分点

問題 1

$0° \leqq \theta \leqq 180°$ である θ に対して，$\dfrac{1+\sin\theta}{2+\cos\theta}$ の最大値，最小値を求めよ．

問題 2

x は $0 \leqq x \leqq 3$ を満たす実数とするとき，$\dfrac{x-1}{x^2+1}$ のとりうる値の範囲を求めよ．

問題 3

$a_1 \sim a_4$，$b_1 \sim b_4$ を実数とし，$a_1 < a_2 < a_3 < a_4$ とする．

$\dfrac{b_1-b_2}{a_1-a_2}$，$\dfrac{b_2-b_3}{a_2-a_3}$，$\dfrac{b_3-b_4}{a_3-a_4}$ の3数の中で最大のものをM，最小のものをm（複数ある場合も含む）とするとき，$m \leqq \dfrac{b_1-b_4}{a_1-a_4} \leqq M$ となることを証明せよ．

問題 4

$\cos 10° + \cos 130° + \cos 250°$ の値を求めよ．

問題 5

x_1，x_2，x_3 は任意の実数とし，$a_1 \sim a_3$，$b_1 \sim b_3$ はどれも正の実数とする．いま，

$$a = \frac{a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3}{a_1+a_2+a_3},\quad b = \frac{b_1x_1+b_2x_2+b_3x_3}{b_1+b_2+b_3}$$

とおくとき，x_1，x_2，x_3 のうちのある x_i，x_j（i，$j=1$，2，3）について，

$$|a-b| \leqq |a-x_i| \leqq |x_j-x_i|$$

が成り立つことを証明せよ．

コメント　ヒント　情報　勉強の仕方　つぶやき…

上の問題のヒントになるかもしれないコメントには，♥マークがつけてあります．

♠ この本の利用法として君たちにすすめたいのは，1に復習，2に復習，3，4がなくて5に復習ということです．この本の問題は受験のレベルから見れば，どれも比較的やさしく，シンプルな形をしています．でも，どの問題も，1つのポイントや，テクニックを，強烈な形で含んでいるのです．

この本を1回目にやるときは数か月で少しの効果
2回目に見直すときには半分ですごい効果
3回目にかけ足でぱらぱらめくりながら復習するときに，ものすごい効果
が期待できるように工夫されているのです．

1回だけのやりっぱなしは避けてください．この本が泣きます！

♥ 問題1，問題2が傾きを表す式だということは，ちょっと考えればわかるでしょう．それぞれ，少しずつ味付けをしてあるので，ごまかされないように解いてください．問題3は，文字の多さに閉口しそうな問題．でも，意味を考えると，実にあたりまえのことを難しく表現しているだけだとわかります．

♥ 昔，筆者の教え子に現役で東大の理Ⅰに入り，数学もすごくよくできたA君という人がいました．A君が高1か高2のころ，うんうんうなって考えこんでいたのが，この問題4です．加法定理でやるとできるんだけど，答えがすごくきれいだから，ワケありのはずだ，というのがA君の直観で，もちろん，この問題はワケありです．

ちなみに

$\sin 20° + \sin 40° + \sin 60° + \cdots\cdots + \sin 320° + \sin 340°$

はいくつでしょう？

♥ 問題5は文字式のお化けのような感じですが，よく見ると，とてもきれいな形をしていますね．（どこがきれいなんだ，といわないように）

$\dfrac{a_1x_1+a_2x_2}{a_1+a_2}$ は，x_1，x_2 を $a_2 : a_1$ の比に分ける分点の式です．

§1 図形量のもつ意味（1）　距離

問題1

$f(x)=|x-1|+|x-2|+|x-3|+|x-4|+|x-5|+|x-6|$

の最小値を求め，最小値を与える x の値をすべて求めよ．

下の数直線上を x が動くとき，$|x-1|+\cdots\cdots+|x-6|$ は，図形的に見ればア〜カの距離の和となる．

この和はどんなとき最小か？ ちょっとずつ x を動かして考えよ．

【方針】 与式は1つの文字だけから成る式で，しかも絶対値をはずせば，各区間で一次式という予想がつきます．……とすれば，**$f(x)$ のグラフは折れ線になるはず** で，多分 x が 1〜6 のどこかで最小値をとるのでしょう．この方針は別解でやってみます．

でも，$|a-b|$ が数直線における a と b の距離だと考えることにより，この問題は楽に解けてしまいます．**差の絶対値 ➡ 距離 とすることにより，問題を視覚的に考えられる** ようになるのです．

【解答】

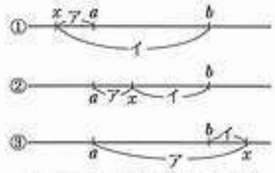
一般に，$a<b$ のとき，$|x-a|+|x-b|$ の値が最小となるのは，右図の②の場合（$a<x<b$ の場合）で，最小値は $b-a$ である．従って，

$|x-1|+|x-6|$ は $1\leqq x\leqq 6$ で最小値 5

$|x-2|+|x-5|$ は $2\leqq x\leqq 5$ で最小値 3

$|x-3|+|x-4|$ は $3\leqq x\leqq 4$ で最小値 1

をとる．よって，

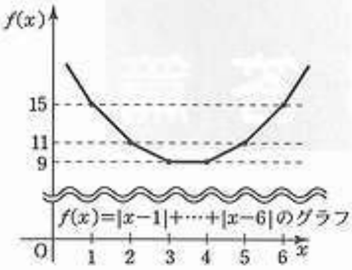


$f(x)=|x-1|+|x-2|+|x-3|+|x-4|+|x-5|+|x-6|$ は $1\leqq x\leqq 6$，$2\leqq x\leqq 5$，$3\leqq x\leqq 4$ のすべてが成り立つ **$3\leqq x\leqq 4$ のとき，最小値 9**（$5+3+1$）をとる．

【別解】

1〜6 と x の大小によって場合分けをして絶対値記号をはずすと，$f(x)$ のグラフは連続した折れ線となるはずだから，$f(1)$〜$f(6)$ の値を計算すると，$(x,\ f(x))$ は，$(1,\ 15)$ $(2,\ 11)$ $(3,\ 9)$ $(4,\ 9)$ $(5,\ 11)$ $(6,\ 15)$ を通ることがわかる．よって，グラフの概形は左図の通りで **$3\leqq x\leqq 4$ のとき，$f(x)$ は最小値 9 をとる．**

$f(x)$ は一次関数的な変化をするはずなので，折れ目の点（$x=1,\ 2,\ \cdots,\ 6$）だけとってつなげばよい．



問題2

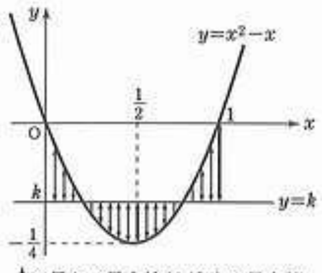
$f(x)=|x^2-x-k|$ とするとき，$0\leqq x\leqq 1$ における $f(x)$ の最大値を最小にするような k の値を求めよ．

【方針】 これは，$g(x)=x^2-x$ と $h(x)=k$ の **たて方向の距離** と考えることができないと，ひどい目にあいそうです．

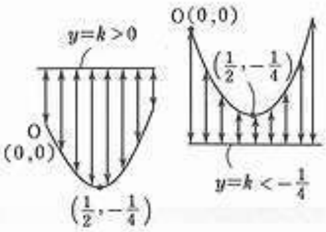
【解答】

左図の太線は，$y=x^2-x=\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{1}{4}$ のグラフである．$f(x)$ は，このグラフと $y=k$ の「たて方向の差」と見なせる．

$-\dfrac{1}{4}\leqq k\leqq 0$ で，k を動かしたとき，（直線 $y=k$ が上下に動く様子を考えよ）



↕ の長さの最大値が $f(x)$ の最大値
これを最も小さくするには $y=k$ をどう上下に動かしたらいい？



$x=1$ のときの↕（前図で $y=k$ より上の↕の最大値）と $x=\dfrac{1}{2}$ のときの↕（$y=k$ より下の↕の最大値）の和は常に一定値 $\dfrac{1}{4}$ なので，そのうちの大きい方は $\dfrac{1}{8}$ 以上である．ところで，$k=-\dfrac{1}{8}$ とすれば，どちらも $\dfrac{1}{8}$ ちょうどにすることができる．

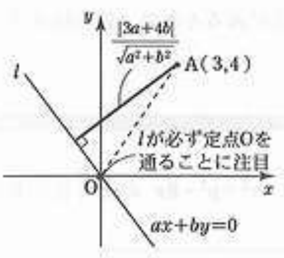
$k>0$，$k<-\dfrac{1}{4}$ のときは，明らかに $f(x)$ の最大値は $\dfrac{1}{8}$ を超えるので（左図）$f(x)$ の最大値を最小にする k の値は $-\dfrac{1}{8}$ で，そのとき最小値は $\dfrac{1}{8}$

問題3

x，y が実数値をとりながら変化するとき，$\dfrac{3x+4y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ の最大値と最小値を求めよ．

【方針】 この形を見たらまず‘点と直線の距離の公式’を連想 するはずです（全く連想できなければ勉強不足といわざるをえないかな）．上級者は，さらに‘単位ベクトルと内積’や，‘コーシー・シュワルツの不等式’を連想するかもしれません．そちらの方は別解で．

【解答】



［xy 平面上の距離を考えたいので，x，y という文字の意味がまぎらわしい．そこで，「a，b が実数のとき $\dfrac{3a+4b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ の最大，最小を求めよ．」という問題にいいかえて考える．］

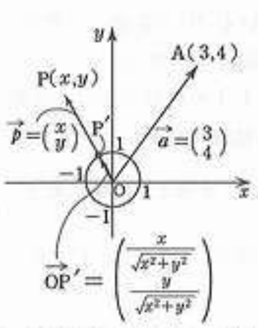
$\dfrac{|3a+4b|}{\sqrt{a^2+b^2}}$ は，左図の直線 $l：ax+by=0$ と点 A(3，4) の距離を表すが，l は原点 O を通るので，

$\dfrac{|3a+4b|}{\sqrt{a^2+b^2}}=$（$l$ と A の距離）$\leqq \mathrm{AO}=\sqrt{3^2+4^2}=5$ ……………………①

等号は，（l と A の距離）$=$AO，つまり AO$\perp l$ のときにおこり，このとき，$a：b=3：4$．

①より，$-5\leqq\dfrac{3a+4b}{\sqrt{a^2+b^2}}\leqq 5$ であり，左の等号は $a：b=3：4$，$a<0$，$b<0$ のとき，右の等号は $a：b=3：4$，$a>0$，$b>0$ のときおきるので，**最大値は 5，最小値は -5**

【別解】



与式$=\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}'$ と考えて，P′ を動かしてみよ．

$$与式=3\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}+4\cdot\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}=\underbrace{\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\\ \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\end{pmatrix}}_{\text{（2つのベクトルの内積）}}$$ となる．$\begin{pmatrix}\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\\ \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\end{pmatrix}$ は左図で，O を始点とし，$\vec{p}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ 方向の単位ベクトルなので，$\vec{p}$ の方向をいろいろと変えたとき，$\vec{a}=\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$ との内積の最大，最小値を考えて，

最大値は $|\vec{a}|\cdot|\vec{p}|=\sqrt{3^2+4^2}\cdot 1=5$，**最小値は，** $-|\vec{a}|\cdot|\vec{p}|=-5$