はじめに

黒木正憲

昔，「大学への数学」の編集部に，代数や解析は得意だが，幾何はすこし苦手という人がいましたが，その人が幾何を解くとなると，きまって，図を鉛筆でこすって真黒にして考えこんでいました．あるとき，それを眺めていた幾何のできる人から，「幾何を解くとき，そうこすっちゃだめですよ」とたしなめられました．

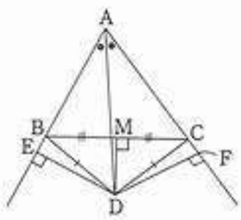
幾何が不得意というのは，定理がウロ憶えであるか，定理の使いかたによく慣れてないことからおこります．それで，図形を眺めても解きかたが見えてこなくて，つい図形をこすってしまうことになるのです．

幾何は，証明できないが，それがなりたつことは認めざるをえない，といういわゆる ユークリッドの公準・公理から，AならばBであり，BならばCである．よって，AならばCであるというような演繹（えんえき）によって，平行，合同，相似，線分比，面積，3平方の定理，中心角，円周角，接線，空間，立体，などの定理からなる体系ですから，それらの定理のどれがぬけても，その定理のからむ問題は解けなくなります．

しかし，幾何の定理を憶えてしまったからといって，それだけでどんな問題でもスムーズに解けるということにはなりません．幾何の力は何題も何題も問題を解いて，いろんなタイプの問題に習熟することから，定理の使いかたが身についてくるのです．

幾何が不得意の人は，一般に，図の描きかたが粗雑です．問題を解くとき，図形を見つめて角が等しい，直角である，線分が等しい，2等辺である，3角定規の形である，とか，相似である，ことなど見ぬかなければならないのですが，図形が粗雑だと，そんなことが見えにくいのです．図形が粗雑だと，たとえば，こんなことがおこります．

“すべての3角形は2等辺3角形である”



図において，AD は∠BAC の2等分線，MD は BC の垂直2等分線とし，E，F は D から，AB，AC の延長へそれぞれ下した垂線の足である．このとき，

△ADE≡△ADF だから AE＝AF

また，DE＝DF，DB＝DC がなりたち

△DBE≡△DCF だから BE＝CF

よって，AE－BE＝AF－CF

すなわち，AB＝AC である．

こういうまちがいは，図が正確でないからおきるのです．コンパスと定規を使って，正しく上の図を描いてみれば，上のような証明などなりたたないことがすぐわかるでしょう．

幾何の問題を解くときは，まず図形を正確に描いて，そこにどんな性質があるのか，図形をこすらないで見つめることです．そういう修行をくり返すうちに，しだいに，幾何の図形に対するヒラメキが生じるようになるのです．

この「目で解く幾何」は，読者にそのようなヒラメキの修行の助けになることを意図して作られました．この書で，読者の幾何の学力に一段と磨きがかかることを期待しています．

本書の利用法

栗田 哲也

◆ はじめに

本の読み方などというものはそもそも個人の自由であるべきはずのものです．しかしながら‘目で解く幾何’という標題からもわかるように，本書は，**図のイメージで幾何を学習**してもらおうということを意図した，従来にはないタイプの学習参考書です．

はじめて本書を手にとられた人には，とまどいをおぼえる人もいるかもしれません．

そこで，以下に本書の目的，特色，構成，勉強法を順を追って述べていきますので，よく読んで効率のよい学習をめざしてください．

◆ 目的・分野

本書は，中学校3年生以上の，特に国立・私立高校（中堅～難関校）の受験生を対象として，幾何の分野を効率よく学習してもらうために編まれた問題集のシリーズの1冊です．

中学校3年生でならう図形分野（円，三平方の定理）を中心に，受験で必要な応用面に特に留意して編集してあります．

従来の問題集と決定的に異なる点は，

① 図形のイメージを徹底的に浮かびあがらせるために，問題からも解答からも，文章で語る部分をできるだけとりさり，図によって感覚的に理解してもらう構成にしたこと．

② 複雑な図形も，基本的な構図が集まってできているという観点から，そうした基本的な構図を十数個とりあげ，問題の中にそうした構図を読みこんでいってもらうという問題構成にしてあること．

③ 図の中に，‘形’を発見してもらおうという趣旨で構成してあるために，従来のような分野別の構成ではなく，「三角定規の発見」「円の相似」………といった具合に，幾何の諸分野を再編成してあること

などです．

本書は，はじめて円や三平方の定理を習う人が基礎を確認する本ではありません．むしろ，そうした基礎が一通りできた人が受験の応用問題に接していく過程で，最も効率よく，そうした‘応用の基本’を習得していくための問題集です．従って予備知識として，中学3年生の教科書程度の知識が前提となります．

◆ 特色

1つ1つの問題は，目で見ながら（鉛筆をつかわずに）解けるようなシンプルな形をしています．

しかしながら，シンプルだからといってやさしい問題だとは限りません．

大半の問題は，君たちがはじめて挑戦したときには，よくわからずに，鉛筆もつかってあれこれ努力した末10分も20分もかかるようなものです．

また，はじめて問題にとりくんだときには，6題の問題がばらばらに見え，その関連もわからないものが大半でしょう．

ところが，解説をよく読んで，問題の本質をよく理解したあとで，もう一度問題にトライしてみると，30秒も経たずに，暗算で答が出るようになり，6問の関連もわかってきます．

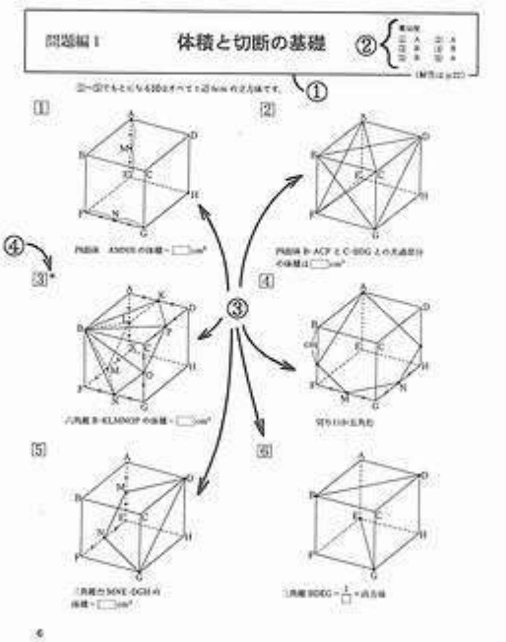
したがって，何回も1つの問題をくりかえし学習することによって，図形の核をなしている基本的なイメージを，頭の中にやきつけることが可能になります．

逆に1問を20分で解けたからといって，解きっぱなしにしたのでは，本書の利用価値が半減してしまいます．

◆ 構成

p.6 からはじまる問題篇では，1 ページにつき 1 つのテーマをもうけて，1 つのテーマにつき 6 問ずつの演習をしてもらいます．

このようなテーマが 16 個，問題数としては，6×16＝96 問からなりたっているのが問題篇で，1 ページは大よそ，次のような構成になっています．



① は，そのページを統一するテーマです．

② は，各問ごとの難易度で，おおよそ

A は，はじめから自力で解きたい問題
B は，20分～30分程度考えてもわからなければ解説を読んでもよい問題
C は，かなり難しい問題．D は，超難問

をそれぞれあらわします．

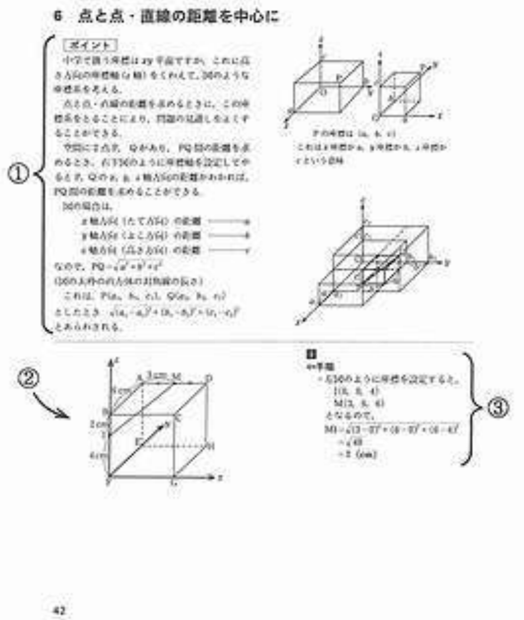
問題にはじめて取りくむときの参考として活用して下さい．

③ は，問題です．下に文章で特別な指示がない場合は，すべて □ **の中に適切な数字を入れることを目標にしてください．**

なお，条件は図の中にすべて入っていますが，図は必ずしも正確とは限りません．

④ ＊印はその問題が‘目’だけでは解きにくい．つまり，鉛筆による計算をした方がよいような計算量であることを示します．しかし，そのような問題はごくわずかです．

一方，p.22 からはじまる解答篇は問題篇 1 ページ 6 題につき，4 ページが対応しています．その 1 ページは次のようになっています．



①は，その章のポイントをまとめてあります．熟読して，自分のものとして下さい．

②は，解答の図の部分で，網目や太線などによって，基本的な構図を浮かびあがらせています．

③は②を見ながら，その問題の手順を知るための文章です．普通の「解答」というよりも，「解くための手順」をかいてあるものです．

ここをよく読んで，自力ではわからなかった問題を理解して下さい．

注や別解は，問題によって適宜書いてありますので，余裕がでてきたら読むようにしましょう．

◆ 勉強法

最終的には，1 ページ 6 問を 1 問 30 秒程度，計 3 分ぐらいで，鉛筆をなるべくつかわずに，頭の中だけで(目だけで)解けるようになるまで訓練することが目標となります．

しかしながら，はじめて問題にとりくんで，このようにすらすら解ける人は，きわめてまれでしょうから，以下に，およその目安を設定しておきます．

♠．まず1ページ分の問題を60分の制限時間でやってみてください．1問につき最低10分は自力で考えてほしいところですが，15分以上考えて手がかりのない問題は，そこで打ちきりにしましょう．

1°　C，D以外の問題は解けた人

2°　Aは解け，Bはわかるような気もするが，あまり自信のない人

3°　Aは解けるが，Bはまるで解けない人

4°　Aもあやしい人

1°の人は，相当に力のある人ですから，ポイント・解説をよく読んで，6題の関連をまず把握して下さい．

次に，3分で，「目で解ける」ようになるまで1ページを訓練して下さい．

2°　3°の人は，まず，**すべての問題をていねいに解き直す**ことからはじめてください．この過程で時間がかかってもかまいません．ここでかなりの時間がかかってもていねいにやれば，そのあとがぐっと楽になります．

全部理解したと思ったら，日をおいて，もう一度6題を30分で解き直して下さい．

あとは，1°の人と同様の勉強法をとって下さい．

4°の人は，図形の力がまだ足りないと思われます．解答篇の ポイント をよく読んでから，もう一度解き直してみて下さい．

そのあと，まずAの印がついている問題にまとをしぼって，学習しましょう．

だんだんと力がついてきたら，2°，3°の人の学習法に準じてください．

以上の他にも，各人でいろいろな工夫をして勉強することが大切だと思います．

Let's try！

♣ 書きこみについて

何度もくりかえし問題を解くことになると思いますので，問題篇にはなるべく書きこみをしないようにしましょう．

逆に解答篇の図には，自分にとって記憶しやすいように書きこみをしたり，メモを書きこんだりすることをおすすめします．

♥ 高数ゼミについて

本書の内容は，94年度から95年度にかけて，高数の「授業版」として企画された「高数ゼミ」の内容にもとづくものです．

「高数ゼミ」においても，上記のような観点から，1日につきプリント2枚（この本の問題篇2ページ分12題）を，宿題として解いてきてもらい，授業では，その12題に対する解説を実施しました．

その過程で，参加してくれた数十人の生徒諸君の要望や感想を聞きながら，よいところは残し，悪いところは取り去り，取捨選択をくりかえしてまとまったのが本書です．

したがって，本書は，既に数十人の先輩の知恵や，意見によって裏打ちされているともいえます．

受験生のみなさんが，この本をうまく活用されて，志望校に合格をはたされることを，願ってやみません．

高校への数学
目で解く幾何
立体・座標編

問題編 1

体積と切断の基礎

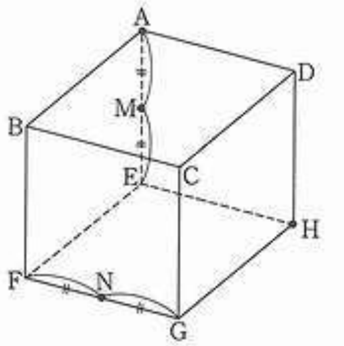
難易度

1	A	2	A
3	B	4	B
5	B	6	A

（解答は p.22）

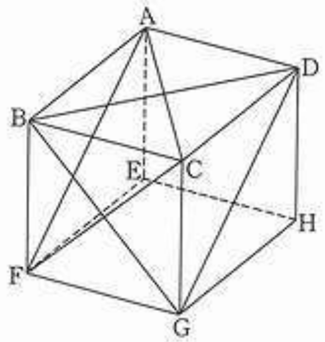
1～5でもとになる図はすべて 1 辺 6cm の立方体です．

1



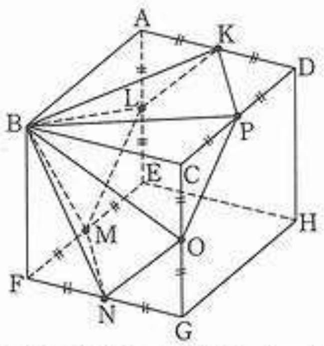
四面体　AMNH の体積＝□cm³

2



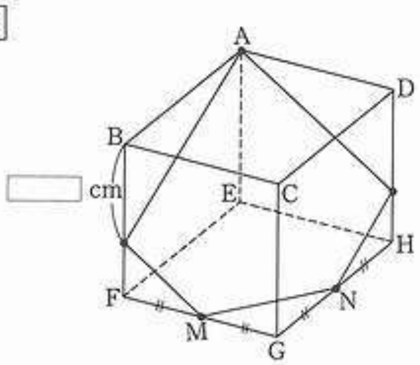
四面体 B–ACF と C–BDG との共通部分の体積は□cm³

3*



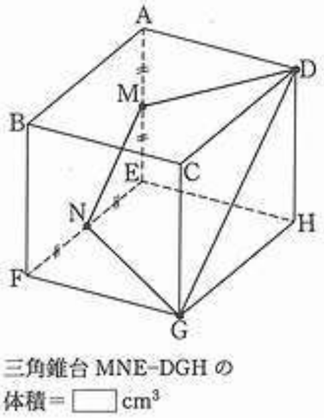
六角錐 B–KLMNOP の体積＝□cm³

4



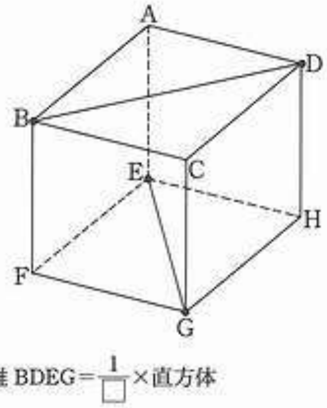
切り口が五角形

5



三角錐台 MNE–DGH の体積＝□cm³

6



三角錐 BDEG＝$\frac{1}{\square}$×直方体

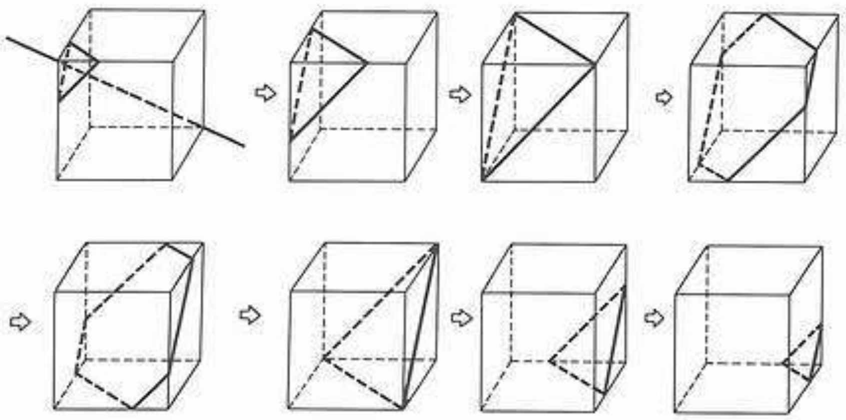
1　体積と切断の基礎

ポイント

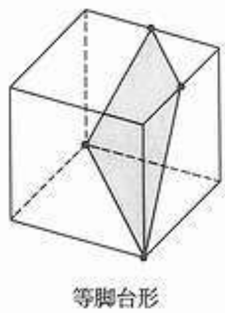
・**三角錐の体積**：あたりまえのことではあるが，三角錐には4つの面がある．
従って，体積を求める場合に，どこを底面と見ると求めやすいかをよく考えることが大切である．

・**立方体の切断**：下図の形が基本となるので，よく慣れておきたい．

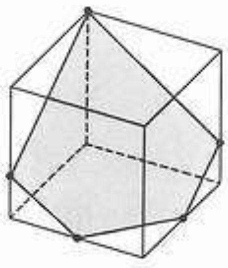
1. 切り口が対角線に垂直な切り方



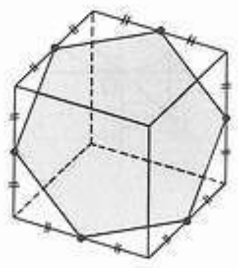
2. 切り口の形による分類



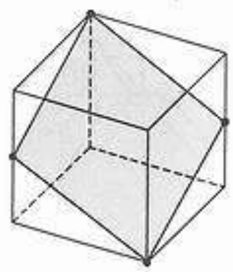
等脚台形



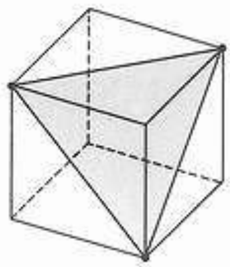
五角形



正六角形

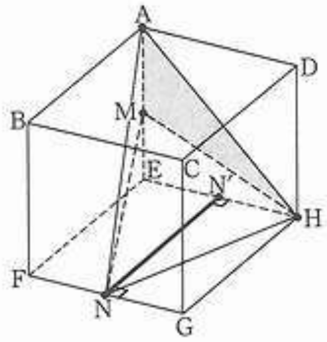


ひし形



正三角形

問題は p.6



1

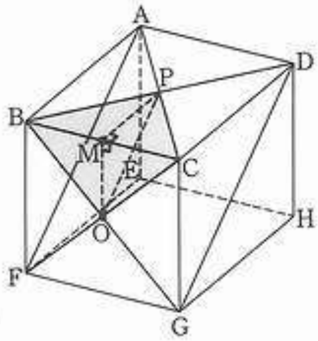
⇦手順

・底面を△AMH とみると，高さは図のNN′となる．

・$\triangle AMH = AM \times EH \div 2$
$= 3 \times 6 \div 2 = 9$ (cm²)

・$NN' = 6$cm

・求める体積$= \frac{1}{3} \times \triangle AMH \times NN'$
$= \frac{1}{3} \times 9 \times 6 =$ **18 (cm³)**



2

⇦手順

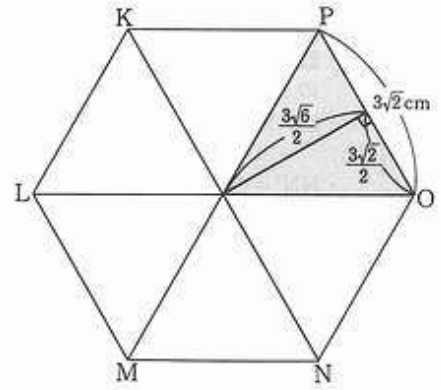
・三角錐 O–PBC の体積を求めればよい．

・△PBC を底面，OM を高さと考える．

・$\triangle PBC = 6 \times 6 \div 4 = 9$ (cm²)
$OM = 3$cm

・求める体積$= \frac{1}{3} \times \triangle PBC \times OM$
$= \frac{1}{3} \times 9 \times 3 =$ **9 (cm³)**

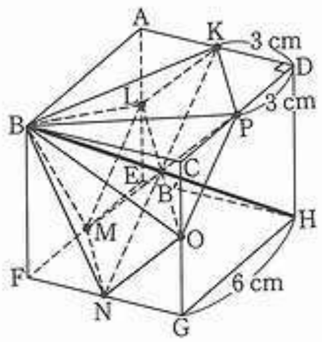
1　体積と切断の基礎



3

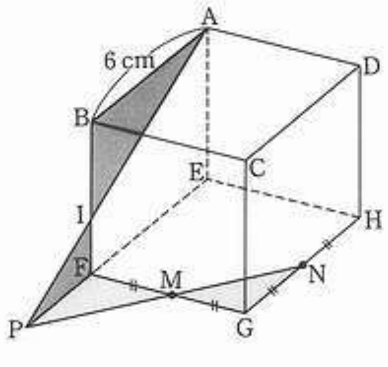
⇦**手順 1**

- KLMNOP は 1 辺の長さが $3\sqrt{2}$ cm の正六角形
- これは 1 辺の長さが $3\sqrt{2}$ cm の正三角形の 6 つ分だから，面積は
  $\left(\frac{1}{2}\times3\sqrt{2}\times\frac{3\sqrt{6}}{2}\right)\times6=27\sqrt{3}$ (cm^2)



⇦**手順 2**

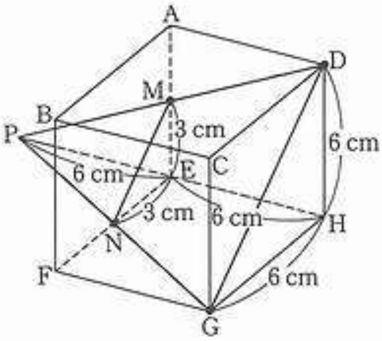
- 高さ BB′は，対角線 BH の半分で，
  $BH\times\frac{1}{2}=6\sqrt{3}\times\frac{1}{2}=3\sqrt{3}$ (cm)
- 求める体積$=27\sqrt{3}\times3\sqrt{3}\times\frac{1}{3}$
  $=81$ (**cm^3**)

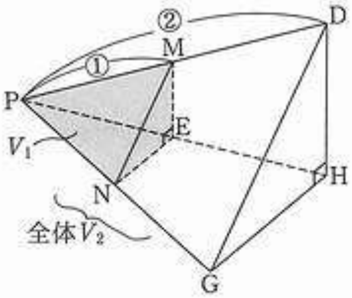


4

⇦**手順**

- MN，EF，AI の延長は 1 点で交わる，その点を P とする．
- △MGN≡△MFP となるので
  FP＝GN＝3cm
- △IBA∽△IFP に注目すると，
  BI：IF＝BA：FP
  ＝6：3
  ＝2：1
- よって，BI は
  $BF\times\frac{2}{2+1}=4$ (**cm**)





5

⇦手順

・GN，DM，HE の各延長は 1 点で交わり，その点を P とする．

・求める三角錐台の体積は，

　三角錐 P–DGH－三角錐 P–MNE

と気づく．

・PE＝6cm

・$\text{P–MNE}=\frac{1}{3}\times\left(3^2\times\frac{1}{2}\right)\times 6$

$=9\ (\text{cm}^3)$

$\text{P–DGH}=\frac{1}{3}\times\left(6^2\times\frac{1}{2}\right)\times 12$

$=72\ (\text{cm}^3)$

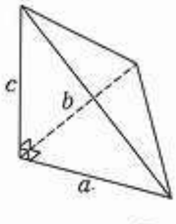
・よって，求める体積は

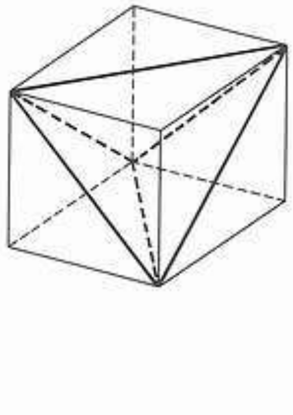
$72-9=\mathbf{63}\ (\mathbf{cm^3})$

注．左図のように立体 V_1 と，V_2 とは相似比が 1：2 の相似なので，体積比は $1^3:2^3=1:8$

そこで，$V_2=\text{P–DGH}=72$　を求めてから

$72\times\frac{8-1}{8}=63\ (\text{cm}^3)$　と出してもよい．





6

⇦手順

・1 つの頂点に，3 つの直角が集まる四面体の体積は

$\frac{1}{6}abc$

で，これは直方体の体積の 6 分の 1

・これを 4 つ直方体から切りおとしたあとに残るのが問題の三角錐なので

$\frac{1}{\square}=1-\frac{1}{6}\times 4=\frac{1}{3}$