はじめに

『1対1対応の演習』シリーズは，入試問題から基本的あるいは典型的だけど重要な意味を持っていて，得るところが大きいものを精選し，その問題を通して

入試の標準問題を確実に解ける力

をつけてもらおうというねらいで作った本です．

さらに，難関校レベルの問題を解く際の足固めをするのに最適な本になることを目指しました．

以上のように，受験を意識した本書ですが，教科書にしたがった構成ですし，解説においては，高2生でも理解できるよう，分かりやすさを心がけました．学校で一つの単元を学習した後でなら，その単元について，本書で無理なく入試のレベルを知ることができるでしょう．

なお，小社では月刊「大学への数学」の増刊号として「入試数学基礎演習」を発行しています．この演習書は，入試の基本レベルの問題を精選して構成されていて，扱っている問題は1対1シリーズよりも基本的です．ですが，教科書の配列にこだわらず，分野別に配列されており，解説は数ⅠＡⅡＢを一通り終えたのを前提とした上での実戦的なもの（例えば，座標の解答で，ベクトルを使うなどしている）になっています．

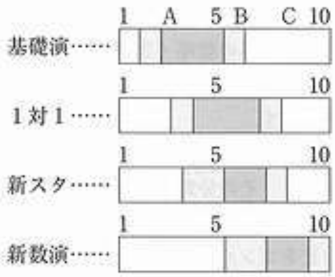
問題のレベルについて，もう少し具体的に述べましょう．水準以上の大学で出題される10題を易しいものから順に1，2，3，…，10として，

1～5の問題……A（基本）
6～7の問題……B（標準）
8～9の問題……C（発展）
10の問題………D（難問）

とランク分けします．この基準で本書と，本書の前後に位置する月刊「大学への数学」の増刊号

「入試数学基礎演習」（「基礎演」と略す）
「新数学スタンダード演習」（「新スタ」と略す）
「新数学演習」（「新数演」と略す）

のレベルを示すと，次のようになります．（濃い網目の問題を主に採用）



さて，本書は，入試の標準問題を確実に解ける力が，問題を精選してできるだけ少ない題数（本書で取り上げた例題は59題です）で身につくように心がけ，そのレベルまで，

効率よく到達してもらうこと

を目標に編集しました．

本書を活用して，数Bの入試への足固めをしていってください．

皆さんの目標達成に本書がお役に立てれば幸いです．

本書の構成と利用法

坪田三千雄

本書のタイトルにある‘1対1対応’の意味から説明しましょう．

まず例題(四角で囲ってある問題)によって，例題のテーマにおいて必要になる知識や手法を確認してもらいます．その上で，例題と同じテーマで1対1に対応した演習題によって，その知識，手法を問題で適用できる程に身についたかどうかを確認しつつ，一歩一歩前進してもらおうということです．この例題と演習題，さらに各分野の要点の整理（2ページ）などについて，以下，もう少し詳しく説明します．

要点の整理： その分野の問題を解くために必要な定義，用語，定理，必須事項などをコンパクトにまとめました．入試との小さくはないギャップを埋めるために，一部，教科書にない事柄についても述べていますが，ぜひとも覚えておきたい事柄のみに限定しました．

例題： 原則として，基本～標準の入試問題の中から

・これからも出題される典型問題
・一度は解いておきたい必須問題
・幅広い応用がきく汎用問題
・合否への影響が大きい決定問題

の59題を精選しました（出典のないものは新作問題，あるいは入試問題を大幅に改題した問題）．そして，どのようなテーマかがはっきり分かるように，一題ごとにタイトルをつけました（大きなタイトル／細かなタイトル の形式です）．なお，問題のテーマを明確にするため原題を変えたものがありますが，特に断っていない場合もあります．

解答の前文として，そのページのテーマに関する重要手法や解法などをコンパクトにまとめました．前文を読むことで，一題の例題を通して得られる理解が鮮明になります．入試直前期にこの部分を一通り読み直すと，よい復習になるでしょう．

解答は，試験場で適用できる，ごく自然なものを採用し，計算は一部の単純計算を除いては，ほとんど省略せずに目で追える程度に詳しくしました．また解答の右側には，傍注（⇐ではじまる説明）で，解答の補足や，使った定理・公式等の説明を行いました．どの部分についての説明かはっきりさせるため，原則として，解答の該当部分にアンダーライン（——）を引きました（容易に分かるような場合は省略しました）．

演習題： 例題と同じテーマの問題を選びました．例題よりは少し難し目ですが，例題の解答や解説，傍注等をじっくりと読みこなせば，解いていけるはずです．最初はうまくいかなくても，焦らずにじっくりと考えるようにしてください．また横の枠囲みをヒントにしてください．

そして，例題の解答や解説を頼りに解いた問題については，時間をおいて，今度は演習題だけを解いてみるようにすれば，一層確実な力がつくでしょう．

演習題の解答： 解答の最初に各問題のランクなどを表の形で明記しました（ランク分けについては前ページを見てください）．その表にはA*，B*∘というように*や∘マークもつけてあります．これは，解答を完成するまでの受験生にとっての“目標時間”であって，*は1つにつき10分，∘は5分です．たとえばB*∘の問題は，標準問題であって，15分以内で解答して欲しいという意味です．高2生にとってはやや厳しいでしょう．

ミニ講座： 例題の前文で詳しく書き切れなかった重要手法や，やや発展的な問題に対する解法などを1～2ページで解説したものです．

コラム： その分野に関連する話題の紹介です．

本書で使う記号など： 上記で，問題の難易や目標時間で使う記号の説明をしました．それ以外では，⇨注は初心者のための，➡注はすべての人のための，➡注は意欲的な人のための注意事項です．また，

∴　ゆえに
∵　なぜならば

1対1対応の演習

数学B 新訂版

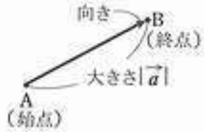
目次

平面のベクトル
要点の整理

1. ベクトルの基本

1・1 ベクトルと有向線分

「向き」と「大きさ」という2つの要素をもつ量をベクトルという．ベクトルは有向線分（向きを指定した線分）で表すことができる．



ベクトル $\vec{a}$ の始点をAとしたときに終点がBになる，つまり，$\vec{a}$ の向きがAからBへ向かう向きであって大きさが線分ABの長さであるとき，$\vec{a}=\overrightarrow{AB}$ と表す．$\vec{a}$ の大きさを $|\vec{a}|$ で表す．

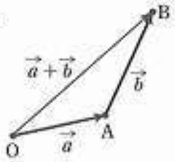
1・2 単位ベクトルと零ベクトル

大きさが1のベクトルを**単位ベクトル**という．大きさが0のベクトルを**零ベクトル**といい，$\vec{0}$ で表す．なお，$\vec{0}=\overrightarrow{AA}$ である．

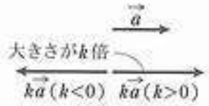
1・3 ベクトルの演算

$\vec{a}$，$\vec{b}$ をベクトル，k を実数とする．

$\vec{a}+\vec{b}$ は，$\vec{a}=\overrightarrow{OA}$，$\vec{b}=\overrightarrow{AB}$ とする（$\vec{a}$ の終点と $\vec{b}$ の始点を一致させる）とき $\overrightarrow{OB}$ である．



$k\vec{a}$ は，$k>0$ のとき $\vec{a}$ と同じ向きで大きさが k 倍のベクトルを表す．$k<0$ のとき $\vec{a}$ と逆向きで大きさが $-k$ $(=|k|)$ 倍のベクトルを表す．



1・4 1次独立

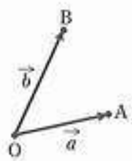
$\vec{a}$ と $\vec{b}$ が

$\vec{a}\neq\vec{0}$，$\vec{b}\neq\vec{0}$，$\vec{a}\not\parallel\vec{b}$

を満たすとき，すなわち

$\vec{a}=\overrightarrow{OA}$，$\vec{b}=\overrightarrow{OB}$ である3点O，A，Bが三角形を作る

とき，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ は**1次独立**であるという．



なお，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ が同じ方向（同じ向きか逆向き）のとき，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ は平行であるといい，$\vec{a}\parallel\vec{b}$ と書く．

2. 点の表現

2・1 平面上の点の表現

平面上にO，A，Bが与えられていて，$\overrightarrow{OA}$（$=\vec{a}$ とおく）と $\overrightarrow{OB}$（$=\vec{b}$ とおく）は1次独立であるとする．

Pをこの平面上の点として，右図のようにP_1，P_2を定める．すると

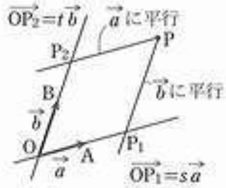
$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OP_1}+\overrightarrow{OP_2}$

であるが，

$\overrightarrow{OP_1}=s\vec{a}$，$\overrightarrow{OP_2}=t\vec{b}$

（s，t は実数）と書けるから

$\overrightarrow{OP}=s\vec{a}+t\vec{b}$



と表せる．図から，異なるPに対して異なる s，t の組が対応する，すなわち

$\overrightarrow{OP}=s\vec{a}+t\vec{b}$，$\overrightarrow{OP'}=s'\vec{a}+t'\vec{b}$，$P\neq P'$

ならば $(s,\ t)\neq(s',\ t')$ [$s\neq s'$ または $t\neq t'$]

であることはわかるだろう．

逆に，実数 s，t に対して，$\overrightarrow{OP}=s\vec{a}+t\vec{b}$ を満たす点Pが一つ定まる．従って，

$\vec{a}$ と $\vec{b}$ が1次独立のとき，

$$s\vec{a}+t\vec{b}=s'\vec{a}+t'\vec{b} \iff s=s' \text{ かつ } t=t'$$

である．

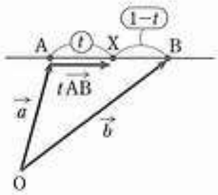
2・2 直線上の点の表現

直線AB上の点Xの表現について考えよう．

まず，実数 t を用いて

$\overrightarrow{AX}=t\overrightarrow{AB}$

と表される．



次に，直線AB上にない点Oをとり，$\overrightarrow{OX}$ を，$\vec{a}=\overrightarrow{OA}$，$\vec{b}=\overrightarrow{OB}$ と上の t を用いて表そう．

$$\overrightarrow{OX}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AX}=\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OA}+t(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})$$
$$=\vec{a}+t(\vec{b}-\vec{a})=(1-t)\vec{a}+t\vec{b}$$

となるから，$s=1-t$ とおけば

$$\overrightarrow{OX}=s\vec{a}+t\vec{b},\quad s+t=1 \text{（係数の和が1）}$$

となる．これは逆も成り立つ．つまり，この形で表される点 X は直線 AB 上にある．

2・3　分点の公式

2・2において，点 X が線分 AB を $m:n$ に内分する点であるとすると，$t=\dfrac{m}{m+n}$ であるから，

$$\overrightarrow{\mathrm{OX}}=\frac{n}{m+n}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{m}{m+n}\overrightarrow{\mathrm{OB}}\left(=\frac{n\vec{a}+m\vec{b}}{m+n}\right)$$

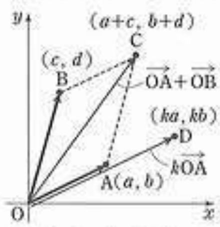
である．外分の場合，例えば AB を 2：3 に外分するときは，一方にマイナスをつけて「(-2)：3 に内分する点」と考えて上の公式を使えばよい．

3. ベクトルの成分表示

座標平面において，原点を O，A$(a,\ b)$とするとき，

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ ［または $(a,\ b)$］

と表す．これをベクトルの成分表示という．



成分表示されたベクトルの和と実数倍は，図の $\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}$，$k\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ に対応して

$$\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}c\\d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a+c\\b+d\end{pmatrix},\quad k\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}ka\\kb\end{pmatrix}$$

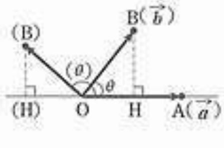
となる．

4. 内積

4・1　内積の定義

$\vec{0}$ でない2つのベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ のなす角を θ とする($0°\leqq\theta\leqq180°$)．$\vec{a}$ と $\vec{b}$ の内積を $|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$ で定め，$\vec{a}\cdot\vec{b}$ と書く．$\vec{a}=\vec{0}$ または $\vec{b}=\vec{0}$ のときは $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$ とする．

$\vec{a}\,(\neq\vec{0})$，$\vec{b}$ の始点を O にそろえ，$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ とする．B から直線 OA に下ろした垂線の足を H とすると，



$0°\leqq\theta\leqq90°$ のとき

$\vec{a}\cdot\vec{b}=\mathrm{OA}\cdot\mathrm{OH}$（2線分の長さの積）

$90°<\theta\leqq180°$ のとき $\vec{a}\cdot\vec{b}=-\mathrm{OA}\cdot\mathrm{OH}$

となる．

4・2　内積の成分での表現

$\vec{a}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix}$，$\vec{b}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix}$ のとき

$$\boldsymbol{\vec{a}\cdot\vec{b}}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix}=\boldsymbol{a_1b_1+a_2b_2}$$

⇒**注**　定義式の cos に余弦定理を使うと導かれる．

4・3　内積の計算法則

［1］ $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$（交換法則）

［2］ $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$（分配法則）

［3］ $(k\vec{a})\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot(k\vec{b})=k(\vec{a}\cdot\vec{b})$（$k$ は実数）

4・4　内積と大きさ

$|\vec{a}|^2=\vec{a}\cdot\vec{a}$，$|\vec{a}|=\sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}}$ である．

$\vec{a}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix}$ のときは，$|\vec{a}|=\sqrt{a_1{}^2+a_2{}^2}$

5. ベクトルの垂直と平行

ここでは，$\vec{a}\neq\vec{0}$，$\vec{b}\neq\vec{0}$ とする．

5・1　垂直

$\vec{a}\perp\vec{b}\iff\boldsymbol{\vec{a}\cdot\vec{b}=0}$

$\vec{a}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix}$，$\vec{b}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix}$ のとき，$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$ は

$a_1b_1+a_2b_2=0$

5・2　平行

$\vec{a}\parallel\vec{b}$

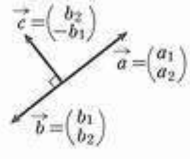
$\iff\vec{a}=t\vec{b}$（t は 0 でない実数）と表される

$\vec{a}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix}$，$\vec{b}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix}$ として，上の条件を成分で表そう．

t を消去という方針でよいが，$\vec{b}$ に垂直なベクトルの一つが

$\vec{c}=\begin{pmatrix}b_2\\-b_1\end{pmatrix}$ ［$\vec{b}\cdot\vec{c}=0$ となる］

であることを用いると，



$\vec{a}\parallel\vec{b}\iff\vec{a}\perp\vec{c}\iff a_1b_2-a_2b_1=0$

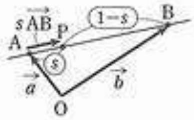
1 内分点，交点(１)

三角形 ABC において，辺 AB を 1：2 に内分する点を D，辺 AC を 3：5 に内分する点を E とし，線分 BE と線分 CD の交点を P とする．

このとき，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\boxed{}\,\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\boxed{}\,\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ となる．　　（立正大・地理／右ページに続く）

直線上の点の表現　直線 AB とその上にない点 O があり，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$ とする．P を直線 AB 上の点とすると，実数 s を用いて $\overrightarrow{\mathrm{AP}}=s\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と表せるから，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+s\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{a}+s(\vec{b}-\vec{a})=(1-s)\vec{a}+s\vec{b}$ ……☆

となる．$\vec{a}$，$\vec{b}$ **の係数の和が 1 であることに注意しよう**．

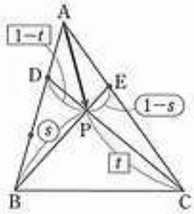


交点の求め方　本問のような構図では，まず線分比（内分比）をおいて

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=(1-s)\overrightarrow{\mathrm{AB}}+s\overrightarrow{\mathrm{AE}},\quad \overrightarrow{\mathrm{AP}}=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{AC}}+t\overrightarrow{\mathrm{AD}}\qquad \text{［右図参照］}$$

とする．次に，登場するベクトルを $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ に統一して（例題であれば $\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ などを用いる），上の 2 式を $\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\alpha\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\beta\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ の形にする．

そうすると“係数比較”ができて s と t についての連立方程式が得られ，（連立方程式を解くと）値が求められる．



解 答

$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\vec{c}=\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ とおく．P は線分 BE 上にあるので，

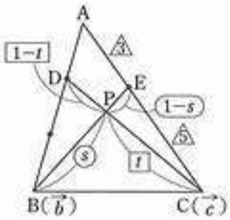
BP：PE$=s：(1-s)$ とおくと

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=(1-s)\overrightarrow{\mathrm{AB}}+s\overrightarrow{\mathrm{AE}}=(1-s)\vec{b}+s\cdot\frac{3}{8}\vec{c}\quad\cdots\cdots①$$

と表せる．また，P は線分 CD 上にあるので，

CP：PD$=t：(1-t)$ とおくと

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{AC}}+t\overrightarrow{\mathrm{AD}}=(1-t)\vec{c}+t\cdot\frac{1}{3}\vec{b}\quad\cdots\cdots②$$



$\vec{b}$，$\vec{c}$ は 1 次独立だから①と②の $\vec{b}$，$\vec{c}$ の係数はそれぞれ等しく，　　⇦$\vec{b}\neq\vec{0}$，$\vec{c}\neq\vec{0}$，$\vec{b}\not\parallel\vec{c}$

$$1-s=\frac{1}{3}t\ \cdots\cdots\cdots\cdots③,\qquad \frac{3}{8}s=1-t\ \cdots\cdots\cdots\cdots④$$

④より $t=1-\dfrac{3}{8}s$ で，これを③に代入して，

$$1-s=\frac{1}{3}\left(1-\frac{3}{8}s\right)\qquad\therefore\ \frac{2}{3}=\frac{7}{8}s\qquad\therefore\ s=\frac{16}{21}$$

これを①に代入して，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\left(1-\dfrac{16}{21}\right)\vec{b}+\dfrac{16}{21}\cdot\dfrac{3}{8}\vec{c}=\boldsymbol{\dfrac{5}{21}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\dfrac{2}{7}\overrightarrow{\mathrm{AC}}}$

1 演習題 （解答は p.22）

正八角形 ABCDEFGH において，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{AH}}=\vec{b}$ とする．また AF と CH，DH との交点をそれぞれ I，J とするとき，

$$\overrightarrow{\mathrm{AI}}=\boxed{\ ア\ }\vec{a}+\boxed{\ イ\ }\vec{b},\ \overrightarrow{\mathrm{AD}}=\boxed{\ ウ\ }\vec{a}+\boxed{\ エ\ }\vec{b}$$

である．

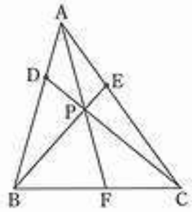
また，$\overrightarrow{\mathrm{AJ}}=\boxed{\ オ\ }\overrightarrow{\mathrm{AH}}+\boxed{\ カ\ }\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ であるから，HJ：JD$=\boxed{\ キ\ }$：1 である．

（立命館大・文系）

ア～エ：
$\overrightarrow{\mathrm{AI}}=\overrightarrow{\mathrm{AH}}+\overrightarrow{\mathrm{HI}}$，
$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\overrightarrow{\mathrm{AH}}+\overrightarrow{\mathrm{HC}}+\overrightarrow{\mathrm{CD}}$
オ～キ：
HJ：JD$=s：(1-s)$とおく．また，$\overrightarrow{\mathrm{AJ}}=k\overrightarrow{\mathrm{AI}}$

◎2 内分点，交点(2)

○1の例題で，線分APの延長が辺BCと交わる点をFとするとき，
BF：FC=$\square$：$\square$，$\overrightarrow{\mathrm{AF}}=\square\,\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\square\,\overrightarrow{\mathrm{AC}}$である．（立正大・地理／後半を追加）

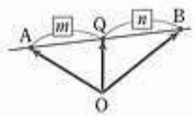


（線分の延長と直線の交点の場合） $\overrightarrow{\mathrm{AF}}$を2通りに表現して求める，という意味では，考え方は例題1と同じである．FがAPの延長上にあることから$\overrightarrow{\mathrm{AF}}=k\overrightarrow{\mathrm{AP}}$，BC上にあることから$\overrightarrow{\mathrm{AF}}=(1-s)\overrightarrow{\mathrm{AB}}+s\overrightarrow{\mathrm{AC}}$と書けることを利用する．答案は，後者の式を書くかわりに

FがBC上 $\iff$ $\overrightarrow{\mathrm{AF}}=x\overrightarrow{\mathrm{AB}}+y\overrightarrow{\mathrm{AC}}$と表したとき$x+y=1$

を用いて，「$\overrightarrow{\mathrm{AF}}=k\overrightarrow{\mathrm{AP}}$を$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$と$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$で表したときの**係数の和が1**」から$k$を決める，とするとよいだろう（解答参照）．

（内分比が先に求められる） この例題では，$k\overrightarrow{\mathrm{AP}}=k\left(\dfrac{5}{21}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\dfrac{2}{7}\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right)=\dfrac{5}{21}k\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\dfrac{2}{7}k\overrightarrow{\mathrm{AC}}$の係数の和が1になるように$\left(\dfrac{5}{21}k+\dfrac{2}{7}k=1\right)k$を決める．この$k$に対して，FはBCを$\dfrac{2}{7}k$：$\dfrac{5}{21}k$に内分する点となるが，この比は$k$によらないから$k$を求めずに内分比を求めることができる．$\overrightarrow{\mathrm{AF}}$を求める場合は，$k$を求めるか，あるいは内分点の公式：右図で$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\dfrac{n}{m+n}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\dfrac{m}{m+n}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$（左ページの☆で$s=\dfrac{m}{m+n}$）を用いる．



解 答

［例題1の解答の続き］

Fは直線AP上にあるので，実数kを用いて

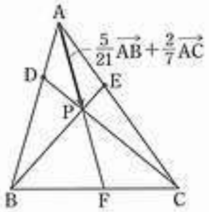
$$\overrightarrow{\mathrm{AF}}=k\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\frac{5}{21}k\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{2}{7}k\overrightarrow{\mathrm{AC}} \quad \cdots\cdots①$$

と書ける．また，Fは直線BC上にあるので，①の$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$と$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$の係数の和$\dfrac{5}{21}k+\dfrac{2}{7}k$は1となる．この$k$に対して，BF：FC$=\dfrac{2}{7}k:\dfrac{5}{21}k=\dfrac{6}{21}:\dfrac{5}{21}=$**6：5**

よって，内分点の公式から

$$\overrightarrow{\mathrm{AF}}=\frac{5}{6+5}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{6}{6+5}\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\boldsymbol{\frac{5}{11}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{6}{11}\overrightarrow{\mathrm{AC}}}$$

⇨注　kを求めると，$\dfrac{5+6}{21}k=1$より$k=\dfrac{21}{11}$



一般に，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\alpha\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\beta\overrightarrow{\mathrm{AC}}$のとき$\overrightarrow{\mathrm{AP}}$
$=(\alpha+\beta)\underbrace{\left(\dfrac{\alpha}{\alpha+\beta}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\dfrac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right)}$

⇦と変形できる．〰は，係数の和が1になっているから，〰$=\overrightarrow{\mathrm{AG}}$とおくとGはBC上の点となる．
　上のように係数の和でくくると交点を見つけることができる．この方法はα，βの分母が同じときには（この変形がしやすいので）有力である．答案としても問題ない．

◎2 演習題 （解答は p.22）

a，bを正の数とする．平行四辺形ABCDの辺ABを$a:b$に内分する点をE，辺BCを3:5に内分する点をFとする．また，線分AFと線分DEの交点をP，対角線ACと線分DFの交点をQとする．

（1） $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$を$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$と$\overrightarrow{\mathrm{AD}}$を用いて表すと$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\square\,\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\square\,\overrightarrow{\mathrm{AD}}$である．
（2） $\overrightarrow{\mathrm{AQ}}$を$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$と$\overrightarrow{\mathrm{AD}}$を用いて表すと$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=\square\,\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\square\,\overrightarrow{\mathrm{AD}}$である．
（3） $a:b=\square:\square$のとき，点Pは線分AFの中点となる．
（4） $a:b=\square:\square$のとき，辺ADと線分PQは平行になる．
（東京工科大・応生，コンピュータ）

（1） $\overrightarrow{\mathrm{AP}}=s\overrightarrow{\mathrm{AF}}$かつPはDE上．（2）も同様．
（3） 上のsが1/2．
（4） $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$が$\overrightarrow{\mathrm{AD}}$の実数倍になる．

平面のベクトル
演習題の解答

1…B**○　2…B**○　3…B**○
4…B***　5…B*○B***　6…A*○
7…A*○　8…B**　9…B***
10…B***　11…B***　12…B**
13…B***

1　アイは，$\overrightarrow{\mathrm{AI}}$ を $\vec{a}(=\overrightarrow{\mathrm{AB}})$ に平行なベクトルと $\vec{b}(=\overrightarrow{\mathrm{AH}})$ に平行なベクトルに"分解"して $\overrightarrow{\mathrm{AI}}=\overrightarrow{\mathrm{AH}}+\overrightarrow{\mathrm{HI}}$ とする．ウエは，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\overrightarrow{\mathrm{AH}}+\overrightarrow{\mathrm{HC}}+\overrightarrow{\mathrm{CD}}$ として $\overrightarrow{\mathrm{CD}}$ については AI : CD を計算して $\overrightarrow{\mathrm{CD}} /\!/ \overrightarrow{\mathrm{AI}}$ から求める．オカは，J が HD 上にあることと $\overrightarrow{\mathrm{AJ}} /\!/ \overrightarrow{\mathrm{AI}}$ であることから求める．

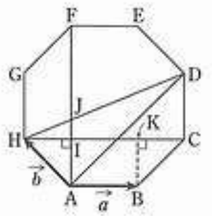
解　**アイ**：　$\overrightarrow{\mathrm{AI}}=\overrightarrow{\mathrm{AH}}+\overrightarrow{\mathrm{HI}}$ である．△AHI は直角二等辺三角形だから

$\mathrm{HI}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{AH}$ で，AH=AB

と合わせて $\overrightarrow{\mathrm{HI}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\overrightarrow{\mathrm{AB}}$

となる．よって，

$$\overrightarrow{\mathbf{AI}}=\frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{2}}}\vec{a}+\vec{b}$$



ウエ：　$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\overrightarrow{\mathrm{AH}}+\overrightarrow{\mathrm{HC}}+\overrightarrow{\mathrm{CD}}$ である．B から HC に下ろした垂線の足を K とすると

$$\mathrm{HC}=\mathrm{HI}+\mathrm{IK}+\mathrm{KC}=\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{AB}+\mathrm{AB}+\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{AB}$$
$$=(1+\sqrt{2})\mathrm{AB}$$

であり，また

$$\mathrm{AI}:\mathrm{CD}=\mathrm{AI}:\mathrm{AH}=\frac{1}{\sqrt{2}}:1=1:\sqrt{2}$$

であるから，

$$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\vec{b}+(1+\sqrt{2})\vec{a}+\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{a}+\vec{b}\right)$$
$$=(\mathbf{2}+\sqrt{\mathbf{2}})\vec{a}+(\mathbf{1}+\sqrt{\mathbf{2}})\vec{b}$$

オカキ：　HJ : JD=s : $(1-s)$ とおくと，

$$\overrightarrow{\mathrm{AJ}}=(1-s)\overrightarrow{\mathrm{AH}}+s\overrightarrow{\mathrm{AD}}\ \cdots\cdots①$$
$$=(1-s)\vec{b}+s\{(2+\sqrt{2})\vec{a}+(1+\sqrt{2})\vec{b}\}$$
$$=(2+\sqrt{2})s\vec{a}+(\sqrt{2}s+1)\vec{b}\ \cdots\cdots②$$

と書ける．

一方，$\overrightarrow{\mathrm{AJ}} /\!/ \overrightarrow{\mathrm{AI}}$ だから，実数 k を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{AJ}}=k\overrightarrow{\mathrm{AI}}=k\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{a}+\vec{b}\right)=\frac{k}{\sqrt{2}}\vec{a}+k\vec{b}$$

と表すことができる．よって，

$$\therefore\ \frac{k}{\sqrt{2}}=(2+\sqrt{2})s,\ k=\sqrt{2}s+1$$
$$\therefore\ (k=)\sqrt{2}(2+\sqrt{2})s=\sqrt{2}s+1$$

これより，

$$(\sqrt{2}+2)s=1,\ s=\frac{1}{2+\sqrt{2}}=\frac{1}{2}(2-\sqrt{2})$$

①に代入して，

$$\overrightarrow{\mathrm{AJ}}=\frac{\sqrt{\mathbf{2}}}{\mathbf{2}}\overrightarrow{\mathbf{AH}}+\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}(\mathbf{2}-\sqrt{\mathbf{2}})\overrightarrow{\mathbf{AD}}$$

また，

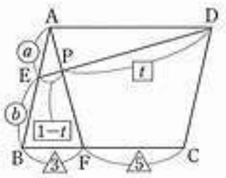
$$\mathrm{HJ}:\mathrm{JD}=\frac{1}{2}(2-\sqrt{2}):\frac{\sqrt{2}}{2}=(\sqrt{\mathbf{2}}-\mathbf{1}):\mathbf{1}$$

⇨**注**　オカ：「$\overrightarrow{\mathrm{AJ}} /\!/ \overrightarrow{\mathrm{AI}}$ だから②の $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の係数の比は $\overrightarrow{\mathrm{AI}}$ のそれに等しく $1:\sqrt{2}$」とすると少し早い．
キ：　JI // DC より HJ : JD=HI : IC となることを用いてもよい．ウエの経過から，
$\mathrm{HI}:\mathrm{IC}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}:\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ である．

2　(1)　$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=s\overrightarrow{\mathrm{AF}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AP}}=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{AD}}+t\overrightarrow{\mathrm{AE}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ で表す．注も参照．
(2)　$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=u\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=(1-v)\overrightarrow{\mathrm{AD}}+v\overrightarrow{\mathrm{AF}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ で表す．
(3)　(1)の s が 1/2.
(4)　$\overrightarrow{\mathrm{PQ}} /\!/ \overrightarrow{\mathrm{AD}}$ だから $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=x\overrightarrow{\mathrm{AB}}+y\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ と表すと $x=0$.

解　(1)　P は AF 上の点だから，

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=s\overrightarrow{\mathrm{AF}}$$
$$=s\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{3}{8}\overrightarrow{\mathrm{AD}}\right)$$



と書ける．P は DE 上の点でもあるから，DP : PE=t : $(1-t)$ として

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{AD}}+t\overrightarrow{\mathrm{AE}}$$
$$=\frac{a}{a+b}t\overrightarrow{\mathrm{AB}}+(1-t)\overrightarrow{\mathrm{AD}}$$

と表せる．よって，

$$s=\frac{at}{a+b},\ \frac{3}{8}s=1-t$$

t を消去して，$\dfrac{3}{8}s+\dfrac{a+b}{a}s=1$