

はじめに

『1対1対応の演習』シリーズは、入試問題から基本的あるいは典型的だけど重要な意味を持っていて、得るところが大きいものを精選し、その問題を通して

入試の標準問題を確実に解ける力をつけてもらおうというねらいで作った本です。

さらに、難関校レベルの問題を解く際の足固めをするのに最適な本になることを目指しました。

数Ⅲの範囲が入試で課されるのは、ほぼ理系に限られますから、本シリーズとしては、やや難し目の問題も一部採用し、その問題を通して是非とも身につけてもらいたいやや発展的な手法なども紹介しました。

また、数Ⅲの範囲は広いので、本シリーズでは数Ⅲを「微積分編」と「曲線・複素数編」の2分冊にしました。微積分の分野でも、いろいろな関数や、やや応用的なもの（区分求積法を使う問題など）と総合的な問題は、「曲線・複素数編」の“いろいろな関数・曲線”，“数Ⅲ総合問題”に掲載しました。

問題のレベルについて、もう少し具体的に述べましょう。水準以上の大学で出題される10題を易しいものから順に1, 2, 3, …, 10として、

- 1~5の問題……A（基本）
- 6~7の問題……B（標準）
- 8~9の問題……C（発展）
- 10の問題……D（難問）

とランク分けします。この基準で本書と、本書の後に位置する月刊「大学への数学」の増刊号

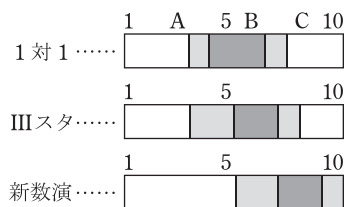
「数学Ⅲスタンダード演習」（「Ⅲスタ」と略す）

「新数学演習」（「新数演」と略す）

順に5月増刊（4月末日発売予定）、

10月増刊（9月末日発売予定）

のレベルを示すと、次のようになります。（濃い網目の問題を主に採用）



さて、本書は、入試の標準問題を確実に解ける力が、問題を精選してできるだけ少ない題数（本書で取り上げた例題は36題、演習題は50題です）で身につくように心がけ、そのレベルまで、

効率よく到達してもらうこと

を目標に編集しました。

本書を活用して、数Ⅲの曲線・複素数の入試への足固めをしていってください。

皆さんの目標達成に本書がお役に立てれば幸いです。

本書の構成と利用法

坪田三千雄

本書のタイトルにある‘1対1対応’の意味から説明しましょう。

まず例題(四角で囲ってある問題)によって、例題のテーマにおいて必要になる知識や手法を確認してもらいます。その上で、例題と同じテーマで1対1に対応した演習題によって、その知識、手法を問題で適用できる程に身についたかどうかを確認しつつ、一步一步前進してもらおうということです。この例題と演習題、さらに各分野の要点の整理(2ページ)などについて、以下、もう少し詳しく説明します。

要点の整理： その分野の問題を解くために必要な定義、用語、定理、必須事項などをコンパクトにまとめました。入試との小さくはないギャップを埋めるために、一部、教科書にない事柄についても述べていますが、ぜひとも覚えておきたい事柄のみに限定しました。

例題： 原則として、基本～標準の入試問題の中から

- ・これからも出題される典型問題
- ・一度は解いておきたい必須問題
- ・幅広い応用がきく汎用問題
- ・合否への影響が大きい決定問題

の36題を精選しました(出典のないものは新作問題,あるいは入試問題を大幅に改題した問題)。そして、どのようなテーマかがはっきり分かるように、一題ごとにタイトルをつけました(大きなタイトル/細かな

タイトルの形式です)。なお、問題のテーマを明確にするため原題を変えたものがありますが、特に断っていない場合もあります。

解答の前文として、そのページのテーマに関する重要手法や解法などをコンパクトにまとめました。前文を読むことで、一題の例題を通して得られる理解が鮮明になります。入試直前期にこの部分を一通り読み直すと、よい復習になるでしょう。

解答は、試験場で適用できる、ごく自然なものを採用し、計算は一部の単純計算を除いては、ほとんど省略せずに目で追える程度に詳しくしました。また解答の右側には、傍注(⇨ではじまる説明)で、解答の補足や、使った定理・公式等の説明を行いました。どの部分についての説明かはっきりさせるため、原則として、解答の該当部分にアンダーライン(——)を引きました(容易に分かるような場合は省略しました)。

演習題： 例題と同じテーマの問題を選びました(ただし、「数Ⅲ総合問題」では対応する例題がないものが14題あります)。例題よりは少し難し目ですが、例題の解答や解説、傍注等をじっくりと読みこなせば、解いていけるはずで、最初はうまくいかなくても、焦らずにじっくりと考えるようにしてください。また横の枠囲みをヒントにしてください。

そして、例題の解答や解説を頼りに解いた問題については、時間をお

いて、今度は演習題だけを解いてみるようにすれば、一層確実な力がつくでしょう。

演習題の解答： 解答の最初に各問題のランクなどを表の形で明記しました(ランク分けについては前ページを見てください)。その表にはA*、B*oというように*やoマークもつけてあります。これは、解答を完成するまでの受験生にとっての“目標時間”であって、*は1つにつき10分、oは5分です。たとえばB*oの問題は、標準問題であって、15分以内で解答して欲しいという意味です。

ミニ講座： 例題の前文で詳しく書き切れなかった重要手法や、やや発展的な問題に対する解法などを1～2ページで解説したものです。

コラム： その分野に関連する話題の紹介です。

本書で使う記号など： 上記で、問題の難易や目標時間で使う記号の説明をしました。それ以外では、⇨注は初心者のための、⇨注はすべての人のための、⇨注は意欲的な人のための注意事項です。■は関連する事項の補足説明などです。また、

∴ ゆえに

∴ なぜならば

1対1対応の演習

数学Ⅲ 曲線・複素数編 新訂版

目次

2次曲線	飯島 康之	5
いろいろな関数・曲線	飯島 康之	29
複素数平面	坪田三千雄	47
数Ⅲ総合問題	飯島 康之	73

ミニ講座

1 準円と準線	23
2 円と楕円	24
3 2次曲線の接線	26
4 極と極線	27
超ミニ講座 格子点の幾何と複素数	72

コラム

円が転がってできる曲線	46
円錐曲線	100
等角螺旋線	102

2次曲線

■ 要点の整理	6
<hr/>	
■ 例題と演習題	
1 放物線	8
2 楕円・双曲線の焦点	9
3 楕円・双曲線の接線／一定値問題	10
4 楕円／媒介変数表示	11
5 楕円を円に変換	12
6 直交する接線	13
7 離心率	14
8 焦点と2次曲線上の点の距離	15
<hr/>	
■ 演習題の解答	16
<hr/>	
■ ミニ講座・1 準円と準線	23
■ ミニ講座・2 円と楕円	24
■ ミニ講座・3 2次曲線の接線	26
■ ミニ講座・4 極と極線	27

2次曲線

要点の整理

1. 放物線

1・1 定義と名称

平面上に定点Fと、Fを通らない定直線*l*をとるとき、

$$PF = (P \text{ と } l \text{ の距離})$$

を満たす点Pの軌跡を

Fを焦点、*l*を準線とする
放物線

という。

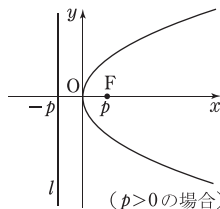
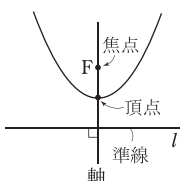
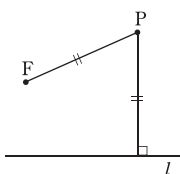
焦点を通り準線に垂直な直線を放物線の軸、放物線とその軸の交点を頂点という。放物線は軸に関して線対称である。

1・2 標準形

*p*を0でない実数(定数)とすると、焦点F(*p*, 0)、準線*l*: $x = -p$ の放物線は

$$y^2 = 4px$$

で表される。これを放物線の標準形という。



2. 楕円

2・1 定義と名称

平面上に2定点F, F'をとるとき、

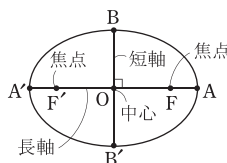
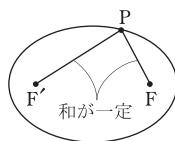
$$PF + PF' = (\text{一定値}) \dots\dots ①$$

を満たす点Pの軌跡を

F, F'を焦点とする楕円
という。

線分FF'の midpoint Oを楕円の中心という。また右図のようにA, A', B, B'を定めるとき、線分AA'を楕円の長軸、線分BB'を短軸という。

和の一定値(①の右辺)は、長軸の長さ一致する。

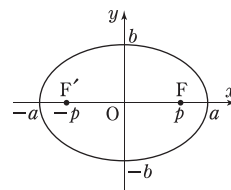


2・2 標準形

*p*を正の実数、*a*を $a > p$ を満たす実数(ともに定数)とする。焦点がF(*p*, 0), F'(-*p*, 0)で、和の一定値が2*a*の楕円は

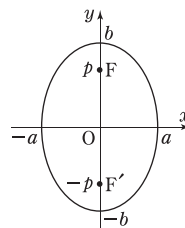
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \dots\dots ②$$

ただし、 $b^2 = a^2 - p^2$ で表される。これを楕円の標準形という。



②で $a > b > 0$ のとき、この方程式で与えられる楕円の焦点は $(\sqrt{a^2 - b^2}, 0)$ と $(-\sqrt{a^2 - b^2}, 0)$ 、和の一定値は2*a*である。

②で $b > a > 0$ のときは、焦点が*y*軸上にある楕円になる。焦点は $(0, \sqrt{b^2 - a^2})$ と $(0, -\sqrt{b^2 - a^2})$ で、和の一定値は2*b*である。



2・3 楕円と円、楕円の媒介変数表示

$$\text{楕円 } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \dots\dots ②$$

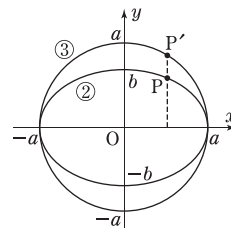
は、円 $x^2 + y^2 = a^2 \dots\dots ③$

を*y*軸方向に $\frac{b}{a}$ 倍にしたものである。

②上の点Pは、媒介変数θを用いて、

$$P(a \cos \theta, b \sin \theta)$$

と表される。このPは、円③上の点 $(a \cos \theta, a \sin \theta)$ を*y*軸方向に $\frac{b}{a}$ 倍にしたものである。



3. 双曲線

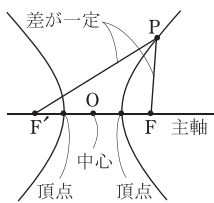
3・1 定義と名称

平面上に2定点F, F'をとるとき、

$$|PF - PF'| = (\text{一定値}) \dots\dots ①$$

を満たす点Pの軌跡を

F, F'を焦点とする双曲線という。



線分FF'の midpoint Oを双曲線の中心、直線FF'を主軸、FF'と双曲線の交点(2個)を頂点という。

差の一定値(①の右辺)は、2頂点間の距離と一致する。

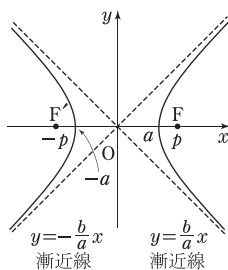
3・2 標準形と漸近線

pを正の実数, aを $0 < a < p$ を満たす実数(ともに定数)とする。焦点がF(p, 0), F'(-p, 0)で、差の一定値が2aの双曲線は、

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \dots\dots ②$$

ただし、 $b^2 = p^2 - a^2$ で表される。これを双曲線の標準形という。

②で $a > 0, b > 0$ のとき、この方程式で与えられる双曲線の焦点は $(\sqrt{a^2 + b^2}, 0)$ と $(-\sqrt{a^2 + b^2}, 0)$ 、差の一定値は2aである。



双曲線②は、 $x \rightarrow \pm\infty$ のとき定直線に限りなく近づく。その直線は漸近線と呼ばれ、 $y = \frac{b}{a}x$ と $y = -\frac{b}{a}x$ である(図の破線)。

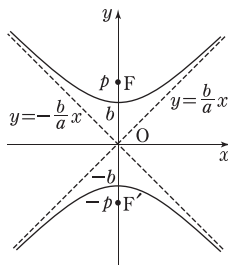
②の右辺を-1にした

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$$

は、焦点がy軸上にある双曲線である(右図)。焦点は

$(0, \sqrt{a^2 + b^2})$ と $(0, -\sqrt{a^2 + b^2})$ 、差の一定

値は2b、漸近線は $y = \frac{b}{a}x$ と $y = -\frac{b}{a}x$ である。



4. 楕円・双曲線の接線

楕円 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 上の点 (x_0, y_0) における接線の方程式は、

$$\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} = 1$$

である。ここで、 (x_0, y_0) は楕円上の点だから

$$\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1 \text{ が成り立つ。}$$

双曲線 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 上の点 (x_0, y_0) における接線の方程式は、

$$\frac{x_0 x}{a^2} - \frac{y_0 y}{b^2} = 1$$

である。上と同じ理由で、 $\frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2} = 1$ が成り立つ。

なお、元の双曲線の式の右辺が-1のときは、以降の式の右辺も-1。

5. 離心率

Cを2次曲線(放物線, 楕円, 双曲線)とする。ただし、ここでは円は楕円に含めない。

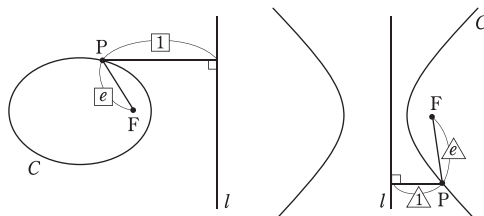
2次曲線に共通する性質:

FをCの焦点(の一つ)とすると、CとFに応じて決まる定直線lと正の定数eが存在して、C上のすべての点Pに対して $PF : (P \text{ と } l \text{ の距離}) = e : 1$ となる。(下図参照)

この直線lを準線、定数eを離心率という。Cが楕円、双曲線の場合、lはFの選び方で変わるが、eはどちらの焦点を選んでも同じ値になる。

Cが放物線の場合、lは1・1の定義の準線と一致し、離心率はe=1である。

Cが楕円の場合は $0 < e < 1$ 、双曲線の場合は $e > 1$ である。



なお、これは逆も成り立つ。つまり、点F, Fを通らない直線l、正の実数eを固定して、

$$PF : (P \text{ と } l \text{ の距離}) = e : 1$$

を満たす点Pの軌跡を考えると、

$0 < e < 1$ のとき楕円、 $e = 1$ のとき放物線、

$e > 1$ のとき双曲線

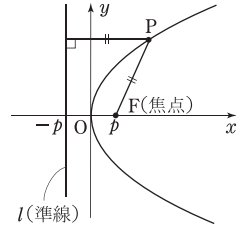
となる。

1 放物線

方程式 $2y^2+3x+4y+5=0$ の表す放物線の焦点の座標は (,) であり、準線の方程式は である。 (山梨大・医-後)

放物線の焦点と準線の公式 定点 F (焦点) と定直線 l (準線) までの距離が等しい点 P の軌跡が放物線であり、

$F(p, 0)$, $l: x=-p \iff$ 放物線の方程式 $y^2=4px$ (標準形) である (方程式の左辺が y^2 であることに注意). これはしっかり覚え、どちらの向き (焦点と準線から方程式, 方程式から焦点と準線) もすぐにかけるようにしよう.



平行移動 例題の方程式は標準形そのものではないので、平行移動する. l (準線) $y^2=4px$ を x 軸方向に a , y 軸方向に b だけ平行移動すると $(y-b)^2=4p(x-a)$ となる. 問題の方程式をまず y について平方完成して $(y-b)^2$ の形を作るとよい.

解答

$$2y^2+3x+4y+5=0 \text{ より, } 2(y+1)^2=-3x-3$$

$$\therefore (y+1)^2=-\frac{3}{2}(x+1)$$

$$\text{よって, } (y+1)^2=4 \cdot \left(-\frac{3}{8}\right)(x+1) \text{ となり, これは } y^2=4 \cdot \left(-\frac{3}{8}\right)x \dots\dots \textcircled{1}$$

を x 軸方向に -1 , y 軸方向に -1 だけ平行移動したものである.

$$\textcircled{1} \text{ の焦点は } \left(-\frac{3}{8}, 0\right), \text{ 準線は } x=\frac{3}{8} \text{ であるから, これを } x \text{ 軸方向に } -1,$$

y 軸方向に -1 だけ平行移動したものが答えて,

$$\text{焦点 } \left(-\frac{11}{8}, -1\right), \text{ 準線 } x=-\frac{5}{8}$$

$$\leftarrow -\frac{3}{8} \rightarrow -\frac{11}{8}, \frac{3}{8} \rightarrow -\frac{5}{8}$$

■ p の絶対値が大きくなる (焦点と準線が離れる) と “開いた” 形の放物線になり, 2 次の係数 ($x=ay^2$ または $y=ax^2$ と書いたときの a) の絶対値は小さくなる.

放物線 $y=x^2$ は, $4 \cdot \frac{1}{4}y=x^2$ と書けるので準線は $y=-\frac{1}{4}$ であるが, この直線は放物線に直交する 2 接線を引くときの 2 接線の交点の軌跡である (※p.23 のミニ講座) ことと合わせて覚えておくとよい.

1 演習題 (解答は p.16)

p, q を 0 でない実数とする. 点 $(0, p)$ を焦点とし x 軸を準線とする放物線を C_p で表し, 点 $(q, 0)$ を焦点とし y 軸を準線とする放物線を D_q で表すとき, 以下の問いに答えよ.

- (1) 放物線 C_p および D_q が点 $(3, 3)$ を通るように p, q の値を定め, それぞれの放物線の方程式を求めよ.
- (2) 4 つの放物線 C_1, D_1, C_{-1}, D_{-1} を図示し, これらで囲まれた部分の面積を求めよ.
- (3) q が 0 でない実数を動くとき, 放物線 D_q が通過する領域を図示せよ.

C_p, D_q の方程式を求めておくとよいだろう. 準線が x 軸, y 軸なので定義から計算する方が早い. (3) は, きちんと解くなら逆手流.

(甲南大・理系)

◆ 2 楕円・双曲線の焦点

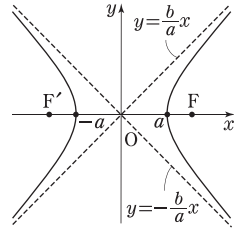
方程式 $2x^2 - y^2 + 8x + 2y + 11 = 0$ が表す曲線は、頂点が \square と \square 、焦点が \square と \square の双曲線で、その漸近線の方程式は $y = \square$ と $y = \square$ である。 (慶大・医)

双曲線の焦点 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) は、 $F(\sqrt{a^2 + b^2}, 0)$ と

$F'(-\sqrt{a^2 + b^2}, 0)$ を焦点とする双曲線で、これは $|PF - PF'| = 2a$ を満たす P の軌跡である。頂点 (直線 FF' との交点) は $(\pm a, 0)$ で、漸近線は $y = \pm \frac{b}{a}x$ となる。焦点の座標はしっかり覚えよう。

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$ の場合は、焦点が $(0, \pm\sqrt{a^2 + b^2})$ 、漸近線は $y = \pm \frac{b}{a}x$

例題では、平方完成して、上記のどちらかを平行移動したものとみる。



■ 解答 ■

与式を平方完成すると、 $2(x+2)^2 - (y-1)^2 = -4$

よって、 $\frac{(x+2)^2}{(\sqrt{2})^2} - \frac{(y-1)^2}{2^2} = -1$ ①

①は、双曲線 $\frac{x^2}{(\sqrt{2})^2} - \frac{y^2}{2^2} = -1$ ②

を x 軸方向に -2 、 y 軸方向に 1 だけ平行移動したものであり、②について、

焦点 $(0, \pm\sqrt{2+4}) = (0, \pm\sqrt{6})$

頂点 $(0, \pm 2)$ 、漸近線 $y = \pm\sqrt{2}x$

である。したがって、これらを \sim して、

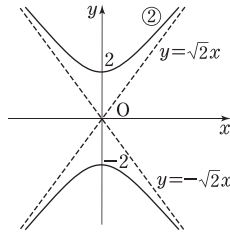
①の頂点は $(-2, 1 \pm 2)$ で $(-2, 3)$ と $(-2, -1)$

焦点は $(-2, 1 \pm \sqrt{6})$ で $(-2, 1 + \sqrt{6})$ と $(-2, 1 - \sqrt{6})$

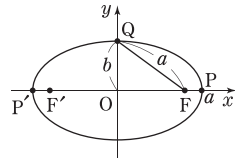
漸近線は $y - 1 = \pm\sqrt{2}(x + 2)$ で

$$y = \sqrt{2}x + 2\sqrt{2} + 1 \text{ と } y = -\sqrt{2}x - 2\sqrt{2} + 1$$

⇒注 公式がたくさんあるが、双曲線の焦点を覚えておけば何とかならう。頂点は、「標準形」の場合、座標軸との交点だから簡単。②の漸近線は、②の右辺を 0 にしたもの ($x \rightarrow \pm\infty$ のときを考えるから定数項を無視) で、②では $(\sqrt{2}, \pm 2)$ が漸近線上の点として求めると早い。差の一定値 $|PF - PF'|$ を考えるときは P を頂点にとるとよい (この一定値が $2a$ とわかる)。



■楕円 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ では、座標軸との交点から焦点を求められる。



以下、 $a > b > 0$ とする。座標軸との交点を $P(a, 0)$ 、 $P'(-a, 0)$ 、 $Q(0, b)$ とすると、 $FP + F'P = PF' + F'P = P'P = 2a$ より、和の一定値は $2a$ である。よって、 $FQ + F'Q = 2FQ = 2a$ である。これより $FQ = a$ である。よって $OF = \sqrt{a^2 - b^2}$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2}{(\sqrt{2})^2} - \frac{y^2}{2^2} = 0$$

⇨上の楕円の場合と同様。

□ 2 演習題 (解答は p.16)

a を 1 より大きい実数とする。座標平面上に方程式 $x^2 - \frac{y^2}{4} = 1$ で定まる双曲線 H と、

方程式 $\frac{x^2}{a^2} + y^2 = 1$ で定まる楕円 E が与えられている。 H と E の第 1 象限における交点

を P とし、 P における H の接線を l_1 、 P における E の接線を l_2 とする。

(1) P の座標を求めよ。

(2) l_1 の傾きと l_2 の傾きを求めよ。

(3) l_1 と l_2 が垂直であることと、 H と E の焦点が一致することは同値であることを示せ。

(神戸大・理系一後)

(2) 接線の公式を使うか、微分で求める。

(3) 示せ、だがそれぞれの a の値を求めればよい。

2次曲線 演習題の解答

- 1…B** 2…A** 3…B***
 4…B** 5…B**○B*** 6…C***
 7…B** 8…B***

1 はじめに、 C_p, D_q の式を求めておく。放物線の定義（焦点までの距離と準線までの距離が等しい点の軌跡）を用いる方が間違えにくだろう。（3）は逆手流で解くのが無難だが、図からもわかる（※注2）

解 $F(0, p)$ とし、 C_p 上の点を $P(x, y)$ とする。 P から x 軸に下ろした垂線の足を H とすると、 $PF=PH$ だから、

$$\sqrt{x^2+(y-p)^2}=|y|$$

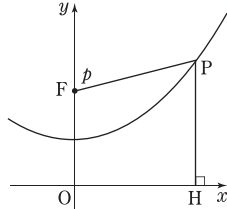
$$\therefore x^2+(y-p)^2=y^2$$

整理して、 C_p の方程式は

$$y=\frac{1}{2p}(x^2+p^2) \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

D_q の方程式は、①の x と y を入れかえ、 p を q にして、

$$x=\frac{1}{2q}(y^2+q^2) \dots\dots\dots \textcircled{2}$$



(1) C_p が(3, 3)を通るとき、 $3=\frac{1}{2p}(9+p^2)$

$$\therefore 6p=9+p^2 \quad \therefore (p-3)^2=0$$

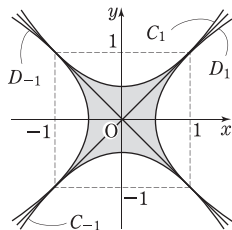
よって、 $p=3, C_3: y=\frac{1}{6}(x^2+9)$

同様に、 $q=3, D_3: x=\frac{1}{6}(y^2+9)$

(2) [C_1 と D_1 は直線 $y=x$ に関して対称。問題文で囲まれると言っているので C_1 と $y=x$ は接するはず]

$$C_1: y=\frac{1}{2}(x^2+1) \text{ について } \frac{1}{2}(x^2+1)-x=\frac{1}{2}(x-1)^2$$

であるから、 C_1 は点(1, 1)で直線 $y=x$ と接する。よって C_1, D_1, C_{-1}, D_{-1} を図示すると右のようになり、これらで囲まれた部分は網目部である。その面積は、対称性を考えると



$$8 \int_0^1 \left\{ \frac{1}{2}(x^2+1) - x \right\} dx = 8 \int_0^1 \frac{1}{2}(x-1)^2 dx$$

$$= 4 \left[\frac{1}{3}(x-1)^3 \right]_0^1 = \frac{4}{3}$$

(3) 点 (x, y) を D_q が通るとすると、②より

$$x=\frac{1}{2q}(y^2+q^2) \text{ すなわち } q^2-2xq+y^2=0 \dots\dots \textcircled{3}$$

を満たす $q(\neq 0)$ が存在する。③の判別式 D について、

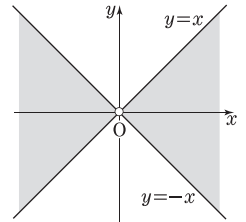
$$D/4=x^2-y^2 \dots\dots \textcircled{4}$$

であるから、④ >0 のときは

③は $q \neq 0$ の解をもつ。

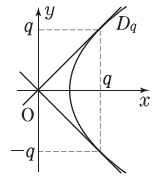
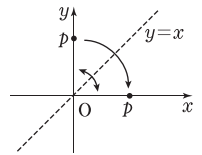
④ $=0$ のとき、③の重解は $q=x$ であるから、 $x \neq 0$ であれば③は $q \neq 0$ の解をもつ。

よって、 $x^2-y^2 \geq 0$ かつ $x \neq 0$ で、上図網目部。



◆注1 C_p の焦点、準線を直線 $y=x$ に関して対称移動させると D_p の焦点、準線になるので、両者は直線 $y=x$ に関して対称。

◆注2 放物線 D_q は (q, q) と $(q, -q)$ で直線 $y=\pm x$ に接する（右図は $q > 0$ の場合）ことから、 D_q の通過領域が(3)の図の網目部になることがわかる。



2 (1) x^2 と y^2 についての連立方程式とみる。

(2) 接線の公式を使う（解答）か、あるいは微分法を用いる（別解）。

(3) l_1 と l_2 が垂直であるときの a の値と、 H と E の焦点が一致するときの a の値をそれぞれ求め、両者が同じであることを言えばよい。

解 $H: x^2 - \frac{y^2}{4} = 1 \dots\dots \textcircled{1}, E: \frac{x^2}{a^2} + y^2 = 1 \dots\dots \textcircled{2}$

(1) ① $\times 4 + \textcircled{2}$ より

$$\left(4 + \frac{1}{a^2}\right)x^2 = 5 \quad \therefore x^2 = \frac{5a^2}{4a^2+1}$$

これを②に代入して、

$$\frac{5}{4a^2+1} + y^2 = 1 \quad \therefore y^2 = \frac{4(a^2-1)}{4a^2+1}$$

P は H と E の第1象限における交点だから、 $a > 1$ に注意すると

$$P\left(\frac{\sqrt{5}a}{\sqrt{4a^2+1}}, \frac{2\sqrt{a^2-1}}{\sqrt{4a^2+1}}\right)$$

(2) $P(p, q)$ とおくと,

$$l_1: px - \frac{q}{4}y = 1, \quad l_2: \frac{p}{a^2}x + qy = 1$$

であるから,

$$l_1 \text{の傾きは, } \frac{4p}{q} = \frac{4\sqrt{5}a}{2\sqrt{a^2-1}} = \frac{2\sqrt{5}a}{\sqrt{a^2-1}}$$

$$l_2 \text{の傾きは, } -\frac{p}{a^2q} = -\frac{\sqrt{5}a}{2a^2\sqrt{a^2-1}} = -\frac{\sqrt{5}}{2a\sqrt{a^2-1}}$$

(3) l_1 の傾きと l_2 の傾きの積は

$$-\frac{10a}{2a(a^2-1)} = -\frac{5}{a^2-1}$$

であるから, $l_1 \perp l_2$ のとき,

$$-\frac{5}{a^2-1} = -1 \quad \therefore a^2 = 6$$

$a > 1$ だから $a = \sqrt{6}$ ……③ である.

一方, H の焦点は $(\pm\sqrt{1+4}, 0) = (\pm\sqrt{5}, 0)$,

E の焦点は $(\pm\sqrt{a^2-1}, 0)$ であるから, これらが一致するとき, $a^2-1=5$ であり, $a > 1$ だから $a = \sqrt{6}$ ……④

③と④は同じだから題意は示された.

別解 (2) [接線の傾きを求めるので微分法を用いてもよい] $P(p, q)$ とおく.

H について, $2x - \frac{1}{4} \cdot 2y \cdot \frac{dy}{dx} = 0$ だから,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4x}{y} \text{で, } l_1 \text{の傾きは } \frac{4p}{q}$$

E について, $\frac{1}{a^2} \cdot 2x + 2y \cdot \frac{dy}{dx} = 0$ だから

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{a^2y} \text{で, } l_2 \text{の傾きは } -\frac{p}{a^2q} \quad (\text{以下略})$$

■一般に, 楕円と双曲線について, 焦点2個が一致するとき, 両者の交点すべてにおいて接線が直交することが知られている.

3 (1) 公式を証明せよ, という問題. 微分法を用いて示すのがよい.

(2) 直線 OH の方程式を求めて接線の式と連立させる.

接線 $x_0x - y_0y = 2$ の法線ベクトルは $\vec{l} = \begin{pmatrix} x_0 \\ -y_0 \end{pmatrix}$, \vec{l} に

垂直なベクトルの一つは $\begin{pmatrix} y_0 \\ x_0 \end{pmatrix}$ なので, これが OH の法線ベクトルになる. なお, 注1のような解法もある.

(3) $(FH \cdot F'H)^2$ を計算していけばよいが, 工夫せずに(2)の結果を代入すると大変. $x_1^2 + y_1^2$ が簡単になることに注目しよう. また, $x_0^2 - y_0^2 = 2$ が成り立つことを忘れないように.

解 (1) $x^2 - y^2 = 2$ の両辺を x で微分すると,

$$2x - 2y \cdot \frac{dy}{dx} = 0 \quad \therefore \frac{dy}{dx} = \frac{x}{y} \quad (y \neq 0 \text{ のとき})$$

$P(x_0, y_0)$ は C 上の点だから $x_0^2 - y_0^2 = 2$ ……①

よって P における C の接線の方程式は, $y_0 \neq 0$ のとき

$$y - y_0 = \frac{x_0}{y_0}(x - x_0)$$

$$\therefore x_0x - y_0y = x_0^2 - y_0^2$$

$$\therefore x_0x - y_0y = 2 \quad (\text{①を用いた})$$

$y_0 = 0$ のとき, P は

$(\sqrt{2}, 0), (-\sqrt{2}, 0)$ で

接線はそれぞれ $x = \sqrt{2}$,

$x = -\sqrt{2}$ だから, この場合

も $x_0x - y_0y = 2$ で表される.

(2) 原点を通り

$x_0x - y_0y = 2$ ……② に垂

直な直線は $y_0x + x_0y = 0$ ……③ であり, $H(x_1, y_1)$

は②と③の交点である.

$$\text{②} \times x_0 + \text{③} \times y_0 \text{ より } (x_0^2 + y_0^2)x = 2x_0$$

$$\therefore x_1 = \frac{2x_0}{x_0^2 + y_0^2}$$

$$\text{③} \times x_0 - \text{②} \times y_0 \text{ より } (x_0^2 + y_0^2)y = -2y_0$$

$$\therefore y_1 = -\frac{2y_0}{x_0^2 + y_0^2}$$

(3) $F(1, 0), F'(-1, 0), H(x_1, y_1)$ より

$$(FH \cdot F'H)^2 = FH^2 \cdot F'H^2$$

$$= \{(x_1-1)^2 + y_1^2\} \{(x_1+1)^2 + y_1^2\}$$

$$= (x_1^2 + y_1^2 + 1 - 2x_1)(x_1^2 + y_1^2 + 1 + 2x_1)$$

$$= (x_1^2 + y_1^2 + 1)^2 - 4x_1^2 \quad \dots\dots\dots \text{④}$$

ここで,

$$x_1^2 + y_1^2 = \frac{4x_0^2}{(x_0^2 + y_0^2)^2} + \frac{4y_0^2}{(x_0^2 + y_0^2)^2}$$

$$= \frac{4(x_0^2 + y_0^2)}{(x_0^2 + y_0^2)^2} = \frac{4}{x_0^2 + y_0^2}$$

であるから

$$\text{④} = \left(\frac{4}{x_0^2 + y_0^2} + 1 \right)^2 - 4 \cdot \frac{4x_0^2}{(x_0^2 + y_0^2)^2} \quad \dots\dots\dots \text{⑤}$$

で, さらに①より $x_0^2 + y_0^2 = 2x_0^2 - 2$ だから,

$$\text{⑤} = \left\{ \frac{4 + (2x_0^2 - 2)}{2x_0^2 - 2} \right\}^2 - \frac{16x_0^2}{(2x_0^2 - 2)^2}$$

$$= \left(\frac{x_0^2 + 1}{x_0^2 - 1} \right)^2 - \frac{4x_0^2}{(x_0^2 - 1)^2}$$

$$= \frac{x_0^4 - 2x_0^2 + 1}{(x_0^2 - 1)^2} = 1$$

