



はじめに



『1対1対応の演習』シリーズは、入試問題から基本的あるいは典型的だけど重要な意味を持っていて、得るところが大きいものを精選し、その問題を通して

入試の標準問題を確実に解ける力をつけてもらおうというねらいで作った本です。

さらに、難関校レベルの問題を解く際の足固めをするのに最適な本になることを目指しました。

以上のように、受験を意識した本書ですが、教科書にしたがった構成ですし、解説においては、高1生でも理解できるよう、分かりやすさを心がけました。学校で一つの単元を学習した後でなら、その単元について、本書で無理なく入試のレベルを知ることができるでしょう。

問題のレベルについて、もう少し具体的に述べましょう。水準以上の大学で出題される10題を易しいものから順に1, 2, 3, …, 10として、

1~5の問題……A（基本）

6~7の問題……B（標準）

8~9の問題……C（発展）

10の問題……D（難問）

とランク分けします。この基準で本書と、本書の

後に位置する月刊「大学への数学」の増刊号
「新数学スタンダード演習」（「新スタ」と略す）
「新数学演習」（「新数演」と略す）
のレベルを示すと、次のようになります。（濃い網目の問題を主に採用）

	1	A	5	B	C	10
1対1……			■			
新スタ……	1			■		10
新数演……				■		10

さて、本書は、入試の標準問題を確実に解ける力が、問題を精選してできるだけ少ない題数（本書で取り上げた例題は54題です）で身につくよう心がけ、そのレベルまで、

効率よく到達してもらうこと

を目標に編集しました。

本書を活用して、数Aの入試への足固めをしていってください。

皆さんの目標達成に本書がお役に立てれば幸いです。

本書の構成と利用法

坪田三千雄

本書のタイトルにある‘1対1対応’の意味から説明しましょう。

まず例題(四角で囲ってある問題)によって、例題のテーマにおいて必要になる知識や手法を確認してもらいます。その上で、例題と同じテーマで1対1に対応した演習題によって、その知識、手法を問題で適用できる程に身についたかどうかを確認しつつ、一步一步前進してもらおうということです。この例題と演習題、さらに各分野の要点の整理(4ページまたは2ページ)などについて、以下、もう少し詳しく説明します。(なお、本書では、数IAに限定すると窮屈なときは、無理に限定せず、数II等の内容に一部踏み込んでいます。)

要点の整理：その分野の問題を解くために必要な定義、用語、定理、必須事項などをコンパクトにまとめました。入試との小さくはないギャップを埋めるために、一部、教科書にない事柄についても述べていますが、ぜひとも覚えておきたい事柄のみに限定しました。

例題：原則として、基本～標準の入試問題の中から

- これからも出題される典型問題
- 一度は解いておきたい必須問題
- 幅広い応用がきく汎用問題
- 合否への影響が大きい決定問題

の54題を精選しました(出典のないものは新作問題、あるいは入試問

題を大幅に改題した問題)。そして、どのようなテーマかがはっきり分かるように、一題ごとにタイトルをつけました(大きなタイトル／細かなタイトルの形式です)。なお、問題のテーマを明確にするため原題を変えたものがありますが、特に断っていらない場合もあります。

解答の前文として、そのページのテーマに関する重要手法や解法などをコンパクトにまとめました。前文を読むことで、一題の例題を通して得られる理解が鮮明になります。入試直前期にこの部分を一通り読み直すと、よい復習になるでしょう。

解答は、試験場で適用できる、ごく自然なものを採用し、計算は一部の単純計算を除いては、ほとんど省略せずに目で追える程度に詳しくしました。また解答の右側には、傍注(△ではじまる説明)で、解答の補足や、使った定理・公式等の説明を行いました。どの部分についての説明かはっきりさせるため、原則として、解答の該当部分にアンダーライン(—)を引きました(容易に分かるような場合は省略しました)。

演習題：例題と同じテーマの問題を選びました。例題よりは少し難し目ですが、例題の解答や解説、傍注等をじっくりと読みこなせば、解いていけるはずです。最初はうまくいかなくても、焦らずにじっくりと考えるようにしてください。また横の枠組みをヒントにしてください。

そして、例題の解答や解説を頼りに解いた問題については、時間をおいて、今度は演習題だけを解いてみるようすれば、一層確実な力がつくでしょう。

演習題の解答：解答の最初に各問題のランクなどを表の形で明記しました(ランク分けについては前ページを見てください)。その表にはA*, B**というように*や。マークもつけてあります。これは、解答を完成するまでの受験生にとっての“目標時間”であって、*は1つにつき10分、。は5分です。たとえばB**の問題は、標準問題であって、15分以内で解答して欲しいという意味です。高1生にとってはやや厳しいでしょう。

ミニ講座：例題の前文で詳しく書き切れなかった重要手法や、やや発展的な問題に対する解法などを1～2ページで解説したものです。

コラム：その分野に関連する興味深い話題の紹介です。

本書を使う記号など：上記で、問題の難易や目標時間で使う記号の説明をしました。それ以外では、△注は初心者のための、△注はすべての人ための、⇒注は意欲的な人のための注意事項です。

1対1対応の演習

数学A 新訂版

目次

場合の数	飯島 康之	5
確率	飯島 康之	29
整数	飯島 康之	55
図形の性質	石井 俊全	91
●		
ミニ講座		
1	重複組合せいろいろ	25
2	円順列と数珠順列	26
3	ダブルカウントに注意	52
4	カタラン数	53
5	整数値をとる多項式	87
6	とことん $ax + by = c$	88
7	大小設定のナゾ	90
8	立体の埋め込み	114
9	作図	116
10	一致法	118
●		
超ミニ講座		
„C _r がらみの話	86	
部屋割り論法	86	
●		
コラム		
速決ジャンケン	54	

場合の数

要点の整理

6枚のカード①②③④⑤⑥から3枚を選んで横一列に並べ、3桁の自然数を作るとしよう。

右のような樹形図を書くと、

- ・百位の数は6通り。
- ・1本目の枝は、百位の数1つにつき5本、よって十位の数には 6×5 個の数が並ぶ。
- ・2本目の枝は、十位の数1つにつき4本、よって一位の数には $6 \times 5 \times 4$ 個の数が並ぶ。

となって、3桁の自然数は $6 \times 5 \times 4 = 120$ 個できることがわかる。

一般に、異なる n 個のものから r 個を選び、その r 個を一列に並べて得られるもの（順列という）の個数は $n(n-1)\cdots(n-(r-1))$ [r 個の数の積] であり、これを ${}_n P_r$ という記号で表す。階乗（1から n までの n 個の自然数の積を n の階乗といい、 $n!$ で表す）の記号を用いると、

$${}_n P_r = \frac{n!}{(n-r)!}$$

と書ける。

次に、上の6枚のカード①～⑥から3枚を選ぶ（どの3枚が選ばれたかだけに着目する）ときには何通りあるかを考えよう。この選び方を組合せという。

3枚の組合せ1通りに対して、順列（3桁の自然数）は ${}_3 P_3 = 3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ 通りできるから、3枚の組合せが x 通りあるとすると、

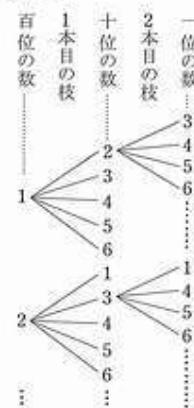
$$x \times 6 = 120 \quad \therefore x = 20$$

となる。

一般に、異なる n 個のものから r 個を選ぶ組合せの個数を ${}_n C_r$ で表す。上と同様に

$${}_n C_r \times {}_r P_r = {}_n P_r$$

であるから、



$${}_n C_r = \frac{{}_n P_r}{{}_r P_r} = \frac{n!}{r!(n-r)!} \quad \text{①}$$

となる。実際の数値計算は、 $(n-r)!$ を約分した形

$${}_n C_r = \frac{n(n-1)\cdots(n-(r-1))}{r!} \quad \text{②}$$

[分子は r 個の自然数の積で n から1ずつ減らしていく] ですることが多い。また、 $r > n/2$ のときは

$${}_n C_r = {}_n C_{n-r} \quad \text{②}$$

を活用して r を小さくしておくとよい。なお、②は①を用いても確かめられるが、「 n 個から r 個を選ぶことと（ここで選ばれなかった） $n-r$ 個を選ぶことは同じ」と考えれば明らかである。

例題1. A, A, B, Bを並べてできる4文字の文字列は全部でいくつあるか。

数え上げ（全部の文字列を書く）でできる程度の個数であるが、辞書式に書き出していかないと間違える可能性が高くなる。この例題では、

AABB, ABAB, ABBA,
BAAB, BABA, BBAA

とすれば過不足がないことが明白。答えは6個である。

計算でも求めてみよう。文字列は順列であるが、例えば1文字目はAかBで2通り、2文字目も2通り、のようにするとうまくいかない。AAの次はBしかないが、ABの次はAでもBでもよく、単純にかけ算で求めることはできない。

同じものを含む順列では、最初に文字を配置する場所を用意しておき、どの文字をどこに配置するか、と考えるとよい。この例題では、「Aを配置する2か所を選ぶ」と考える。残り2か所はBになって文字列が1つ決まるので、求める個数は「4個から2個を選ぶ組合せの個数」で

$${}_4 C_2 = \frac{4 \cdot 3}{2 \cdot 1} = 6 \text{ (個)}$$

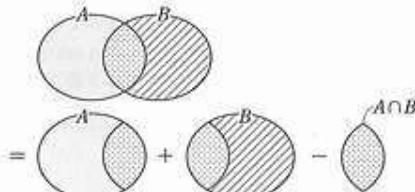
となる。

2. 和の法則

和集合の要素の個数に関する公式

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) \cdots ③$$

は特に重要である ($n(X)$ は集合 X の要素の個数を表す)。公式の丸暗記より、



のようなイメージを大切にしよう。

例題 2. 6枚のカード [1][2][3][4][5][6] から 3枚を選び、横一列に並べて 3桁の自然数を作る。1または 2 を含む自然数はいくつあるか。

まず、上の公式を使って解いてみよう。[1]～[6] の中の 3枚を並べてできる自然数のうち、1 を含むもの全体の集合を A 、2 を含むもの全体の集合を B とする。

$n(A)$ について： [1] を含む 3枚のカードの組合せは、[1] 以外の 2枚の組合せを考えればよく、 ${}_5C_2 = 10$ 通り。3枚のカードの組合せ 1通りに対して並べ方（並べてできる自然数）は $3! = 6$ 通りあるから、 $n(A) = 10 \times 6 = 60$

$n(B)$ について： 同様に $n(B) = 60$

$n(A \cap B)$ について： [1][2] を含む 3枚のカードの組合せは、残りの 1枚を考えて 4通り。並べ方は各 6通りだから、 $n(A \cap B) = 4 \times 6 = 24$

以上より、

$$\begin{aligned} n(A \cup B) &= n(A) + n(B) - n(A \cap B) \\ &= 60 + 60 - 24 = 96 \text{ (個)} \end{aligned}$$

* * *

例題 2 の解答としてはこれでよいのであるが、実は全体から条件を満たさないものを引く方が早い。 \bar{X} で「全体集合 U の要素であって X の要素でないもの」(X の補集合という) を表すとき、

$$n(X) = n(U) - n(\bar{X}) \cdots ④$$

が成り立つことを用いる。

例題 2 では、求めたいものの補集合は「1 も 2 も含まない自然数」であるから、[3][4][5][6] から 3枚を選んで横一列に並べて作られる自然数である。それは ${}_4P_3 = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ (個) あるから、全体 (${}_6P_3 = 120$ 個) から引いて 96 個が答えとなる。

* * *

公式③は、第 1 の解法のように、求めたいものが左辺で実際に計算するのは右辺、という使い方をすることが多い。これは、「または」の条件より「かつ」の条件の方が扱いやすいことが多いからである。第 2 の解法は、ド・モルガンの法則（本シリーズ教科書 p.68）

$$A \cap \bar{B} = \bar{A} \cup \bar{B}, \quad A \cup \bar{B} = \bar{A} \cap \bar{B}$$

を用いて「または」を「かつ」に変換している。④で $X = A \cup B$ とし、ド・モルガンの法則の後者を使うと

$$n(A \cup B) = n(U) - n(\bar{A} \cap \bar{B}) = n(U) - n(\bar{A} \cap \bar{B})$$

となる。 $\bar{A} \cap \bar{B}$ を日本語で書いたものが「1 も 2 も含まない」である。

なお、④は「少なくとも 1つ…」というときに使うことが多い。これを否定すると「すべてが…でない」となって扱いやすいからである。

3. 区別する・しない

場合の数の問題では、人は区別する。モノや文字は区別しないのが前提（暗黙の了解）である。問題文に明記されていなければこのルールに従う。

最終的な答えはこれに従って求めなければならないが、「とりあえず区別する」のは自由である。例えば、例題 1 で 2つの A、2つの B をそれぞれ区別して A_1, A_2, B_1, B_2 とすると、これらの順列は $4!$ 通りある。区別しない文字列 1つについて、どちらの A を A_1 にするか、どちらの B を B_1 にするかが 2通りずつあって、区別する文字列 4通り ($4 = 2 \times 2$) と対応する。従って求める個数は

$$\frac{4!}{2 \times 2} = 6 \text{ (個)}$$

1 順列／整数・重複しない

5個の数字0, 1, 2, 3, 4から異なる3個の数字を選んで3桁の整数をつくるとする。

- (1) 奇数は□通り、偶数は□通りできる。
- (2) 4の倍数は□通りできる。
- (3) 321より小さい整数は□通りできる。
- (4) つくれる3桁の整数を、すべて足し合わせた数は□となる。 (大阪経済大)

制約の強い桁から 数字を並べて条件を満たす整数を作る問題では、制約の強い桁から決めていくのが定石である。奇数・偶数の場合は、一位(それぞれ奇数・偶数) ⇔ 最高位(0でない) ⇔ 十位(制約なし)の順に考えるとよい。4の倍数は「下2桁が4の倍数」である。

和は桁ごとに計算 和の計算は桁ごとに行うのがポイント。傍注を参照。

解答

(1) ア: 奇数になるのは一位が1か3のときである。**1は、百位が2, 3、⇨百位は最高位なので0でない。4の3通りで十位が(一位、百位以外の)3通りなので $3 \times 3 = 9$ 通り。**3も同⇨十位は制約がないので最後に決める。いつでも3通り。

イ: 偶数になるのは一位が0か2か4のときである。**0は、百位が4通り、⇨一位に0を使ったのであとは自十位が3通りで12通り。**2は百位が1, 3, 4の3通りで十位が3通りなので由。

9通り。**4も同様に9通り、合わせて $12 + 9 \times 2 = 30$ 通り。

(2) 4の倍数になるのは下2桁が4の倍数のときだから、下の6タイプ。

*04, *12, *20, *24, *32, *40

⇨ 小さい順。

*04, *20, *40の*は各3通り、*12, *24, *32の*は各2通りなので、⇨0を含むか含まないか。全部で $3 \times 3 + 2 \times 3 = 15$ 通り。

(3) 1**は $4 \times 3 = 12$ 通り、2**も12通り。30*は3通り、31*も3通りで⇨321までの個数を小さい方から数えていく。1**は十位が4通りで一位が3通り。

(4)すべての整数を桁ごとに足す。

百位: 1**, 2**, 3**, 4**は12通りずつあるので、和は
 $(100+200+300+400) \times 12 = 12000$

$$\begin{aligned} & \Leftrightarrow 102 = 100 \times 1 + 10 \times 0 + 1 \times 2 \\ & \quad \vdots \quad \vdots \\ & 134 = 100 \times 1 + 10 \times 3 + 1 \times 4 \\ & \quad \vdots \quad \vdots \\ & 432 = 100 \times 4 + 10 \times 3 + 1 \times 2 \end{aligned}$$

十位: *0*は和に影響しない。*1*, *2*, *3*, *4*は
(百位が3通り、一位が3通りで)9通りずつあるので、和は

網目部それぞれの和を計算する。

$$(10+20+30+40) \times 9 = 900$$

一位: **1, **2, **3, **4は9通りずつあるので、和は
 $(1+2+3+4) \times 9 = 90$

以上を合わせて、 $12000 + 900 + 90 = 12990$

○ 1 演習題 (解答は p.20)

袋の中に1から5までの整数が1つずつ記入されたカードが各1枚ずつ全部で5枚入っている。この中から1枚ずつもとに戻さずに、3枚のカードを取り出して順に並べ、3桁の整数をつくる。

- (1) このようにしてつくれる整数は全部で□個ある。
- (2) 偶数のカードが少なくとも1枚使われている整数は□個ある。
- (3) 1のカードが使われている整数は□個ある。
- (4) 3の倍数である整数は□個ある。
- (5) (1)の整数のすべての和は□である。 (帝京大)

(2)は、偶数のカードが使われない方を数えると早い。(4)はまずカード3枚の組合せを考える。

● 2 順列／隣り合う

5個の文字 A, A, B, B, X を横一列に並べる。ただし、同じ文字どうしは区別しないものとする。

- (1) この並べ方は 通りある。
- (2) A と A が隣り合うような並べ方は 通りある。
- (3) A と A が隣り合い、かつ、B と B も隣り合うような並べ方は 通りある。
- (4) A と A が隣り合はず、かつ、B と B も隣り合わないような並べ方は 通りある。
- (5) X より右側と左側にそれぞれ 1つずつ A があるような並べ方は 通りある。

(例: AXBAB)

(立命館大・理系)

(同じ文字が複数あるとき) 同じ文字が複数ある(区別しない)ので、(1)は $5!$ ではない。このよう
な問題では、文字を配置する場所を のように用意しておき、「同じ種類の文字を置く場所
を一度に選ぶ」つまり、例えば A を置く 2か所をまず選ぶ (${}_5C_2$ 通り) と考えるとよい。

(隣り合うものはひとつにまとめる) (2)では、隣り合う A をまとめ、**[AA]** を 1つの文字とみなす。

解 答

- (1) 文字を置く 5か所(右の ~)から 2か所を選んで A を置き、残りの 3か所から 2か所を選んで B を置く(最後に残ったところが X)と文字列が 1つ決まるので、

$${}_5C_2 \times {}_3C_2 = \frac{5 \cdot 4}{2} \times \frac{3 \cdot 2}{2} = 30 \text{ (通り)}$$

- (2) 隣り合う A を **[AA]** という 1つの文字とみなし、**[AA]**, B, B, X を並べると考える。(1)と同様、**[AA]** の場所、X の場所の順で決めると考えて、

$$4 \times 3 = 12 \text{ (通り)}$$

- (3) 3つの文字 **[AA]**, **[BB]**, X を並べると考えて $3! = 6$ (通り)

- (4) 求めるものは右図網目部の文字列の個数である。

- (2)から A は 12 個、B も同数の 12 個で、(3)から A かつ B は 6 個だから、A または B は

$$12 + 12 - 6 = 18 \text{ 個}$$

よって、答えは、 $30 - 18 = 12$ (通り)

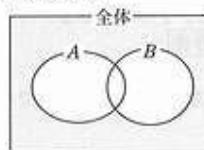
- (5) B の位置((1)の ~ のうちの 2か所)を決めると残りの 3か所は左から A, X, A となるしかないので題意の文字列が 1つ決まる。従って、 ${}_5C_2 = 10$ 通り。

【別解】

- (5) AXA を先に並べておき、両端と間に B を入れる。

B が隣り合う場合、右の 4 個の \uparrow から 1つ選んで **[BB]**

- を入れるので 4 通り。B が隣り合わない場合、4 個の \uparrow から異なる 2 個を選んで B を 1 個ずつ入れるので ${}_4C_2 = 6$ 通り。合わせて、 $4 + 6 = 10$ 通り。



A: Aが隣り合う
B: Bが隣り合う

○ 2 演習題 (解答は p.20)

7個の文字 F, G, G, I, I, U, U を横一列に並べる。

- (1) 「GIFU」という連続した 4 文字が現れるように並べる方法は何通りあるか。

- (2) 「GI」「FU」という連続した 2 文字がともに現れ、少なくとも 1つの「GI」が「FU」よりも左にあるように並べる方法は何通りあるか。

GIFU, GI, FU を 1 文字
とみなすが、(2)は FU
より左に GI が 2 つ現れる
場合がある。

場合の数 演習題の解答

1…B**o	2…B***	3…B***
4…B**	5…B***	6…C**
7…C**	8…B***	9…B**B*
10…B**	11…B**C***	12…C***

(1) (2)は偶数のカードが使われない整数の個数を全体から引く。(4)は、作られた整数が3の倍数になるための条件は各桁の和が3の倍数であることに着目し、まずカード3枚の組合せを列举する。(5)は例題と同様に桁ごとに和を計算する。

(解) (1) 百位、十位、一位の順に決めるとき、決め方はそれぞれ5通り、4通り、3通りあるから、整数は全部で $5 \times 4 \times 3 = 60$ 個ある。

(2) 偶数のカードを使わないものは、奇数の1, 3, 5を並べてできる整数で、それは $3! = 6$ 個ある。よって、 $60 - 6 = 54$ 個。

(3) 1以外のカード(2, 3, 4, 5から2枚)の選び方は ${}_4C_2$ 通りあり、並べ方はそれぞれ $3! = 6$ 通りだから

$${}_4C_2 \times 6 = 6 \times 6 = 36\text{個}.$$

(4) 作られた整数が3の倍数であるための条件は各桁の和Sが3の倍数であること。

$$1+2+3 \leq S \leq 3+4+5 \text{ だから } S=6, 9, 12 \text{ で}$$

• S=6のときカードは1, 2, 3

• S=9のときカードは1, 3, 5または2, 3, 4

[5が使われるか使われないかを考える]

• S=12のときカードは3, 4, 5

である。並べ方はそれぞれ6通りあるので、3の倍数は $4 \times 6 = 24$ 個ある。

(5) (1)のうち、一位が1となるものは(百位、十位が4通り、3通りで)12個あり、一位が2, 3, 4, 5のものも同数ずつある。よって、一位の数の和は

$$(1+2+3+4+5) \times 12 = 180$$

十位の数の和、百位の数の和も同じなので、求める和は

$$180 \times 1 + 180 \times 10 + 180 \times 100 = 19980$$

※注 (3)は1のカードが使われないもの…☆を全体から引いてもよい。☆は(1)と同様に考えて(百位、十位、一位の順に決めるとして4通り、3通り、2通り) $4 \times 3 \times 2 = 24$ 個だから、答えは $60 - 24 = 36$ 個

(2) 連続するものはかたまりと見て並べる、(1)は[GIFU]を1つの文字とみなす。(2)は[GI], [FU]とかたまりを作りて並べればよいが、[FU]の左に[GI]が2つある場合に注意が必要。

(解) (1) 「GIFU」を1つの文字とみて[GIFU], G, I, Uの4文字を並べると考えればよく、

$$4! = 24\text{通り}$$

(2) まず、[GI], [FU], G, I, Uの5個を、[GI]が[FU]の左に来るよう並べる。5か所のうちの2か所を選んで左から[GI], [FU]を入れ、残りの3か所にG, I, Uを入れればよいので、このような並べ方は

$${}_5C_2 \times 3! = 10 \times 6 = 60\text{通り}$$

ある。

この60通りには、GIGIFUUのように

FUの左にGIが2個あるもの.....①

が[上の例なら[GI][GI][FU]U, GI[GI][FU]Uのように]2回ずつ数えられている。

①を満たすものは、[GI], [GI], [FU]をこの順に並べておいてUを両端または間(全部で4か所)のどこかに入れれば作られるので、4通りある。

従って、答えは $60 - 4 = 56$ 通り。

(3) (2) まずKが隣り合わない順列(Aは隣り合ってもよい)を数え、そこからAが隣り合うものを引くと考える。あるいは例題2と同様の方針(☞別解)。

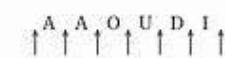
(3) 定石通り、隣り合わないものを後から入れる。

(解) 8文字はK, K, A, A, O, U, D, I

(1) ${}_8C_2 \times {}_6C_2 \times 4!$

$$= \frac{8 \cdot 7}{2} \times \frac{6 \cdot 5}{2} \times 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 2$$

= 10080 (通り)

(2) まずKが隣り合わない  並べ方の総数を求める。K以外の6文字を並べ、その間と両端(7か所)から異なる2か所を選んでKを入れると考えて、

$$\frac{{}_6C_2 \times 4!}{AA} \times {}_7C_2$$

$$= \frac{6 \cdot 5}{2} \times 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \times \frac{7 \cdot 6}{2} = 7 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 2$$

= 7560 (通り)①

①のうち、Aが隣り合うものは、[AA], O, U, D, Iの5個を並べてからKを入れると考えて、

$$5! \times {}_5C_2 = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \times \frac{6 \cdot 5}{2} = 1800\text{通り}.$$

よって、 $7560 - 1800 = 5760$ 通り。