はじめに

『1対1対応の演習』シリーズは，入試問題から基本的あるいは典型的だけど重要な意味を持っていて，得るところが大きいものを精選し，その問題を通して

　　　入試の標準問題を確実に解ける力

をつけてもらおうというねらいで作った本です．

さらに，難関校レベルの問題を解く際の足固めをするのに最適な本になることを目指しました．

数Ⅲの範囲が入試で課されるのは，ほぼ理系に限られますから，本シリーズとしては，やや難し目の問題も一部採用し，その問題を通して是非とも身につけてもらいたいやや発展的な手法なども紹介しました．

また，数Ⅲの範囲は広いので，本シリーズでは数Ⅲを「微積分編」と「曲線・複素数編」の2分冊にしました．微積分の分野でも，いろいろな関数や，やや応用的なもの（区分求積法を使う問題など）と総合的な問題は，「曲線・複素数編」の“いろいろな 関数・曲線”，“数Ⅲ総合問題”に掲載しました．

問題のレベルについて，もう少し具体的に述べましょう．水準以上の大学で出題される10題を易しいものから順に1，2，3，…，10として，

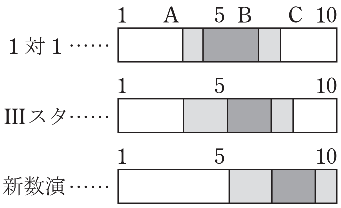
　　1～5の問題……A（基本）
　　6～7の問題……B（標準）
　　8～9の問題……C（発展）
　　10の問題………D（難問）

とランク分けします．この基準で本書と，本書の後に位置する月刊「大学への数学」の増刊号

　「数学Ⅲスタンダード演習」（「Ⅲスタ」と略す）
　「新数学演習」（「新数演」と略す）

順に5月増刊（4月末日発売予定），
10月増刊（9月末日発売予定）

のレベルを示すと，次のようになります．（濃い網目の問題を主に採用）



さて，本書は，入試の標準問題を確実に解ける力を，問題を精選してできるだけ少ない題数（本書で取り上げた例題は75題です）で身につくように心がけ，そのレベルまで，

　　　効率よく到達してもらうこと

を目標に編集しました．

本書を活用して，数Ⅲの微積分の入試への足固めをしていってください．

皆さんの目標達成に本書がお役に立てれば幸いです．

本書の構成と利用法

坪田三千雄

本書のタイトルにある‘1対1対応’の意味から説明しましょう．

まず例題(四角で囲ってある問題）によって，例題のテーマにおいて必要になる知識や手法を確認してもらいます．その上で，例題と同じテーマで1対1に対応した演習題によって，その知識，手法を問題で適用できる程に身についたかどうかを確認しつつ，一歩一歩前進してもらおうということです．この例題と演習題，さらに各分野の要点の整理（2～4ページ）などについて，以下，もう少し詳しく説明します．

要点の整理：　その分野の問題を解くために必要な定義，用語，定理，必須事項などをコンパクトにまとめました．入試との小さくはないギャップを埋めるために，一部，教科書にない事柄についても述べていますが，ぜひとも覚えておきたい事柄のみに限定しました．

例題：　原則として，基本～標準の入試問題の中から

・これからも出題される典型問題
・一度は解いておきたい必須問題
・幅広い応用がきく汎用問題
・合否への影響が大きい決定問題

の75題を精選しました（出典のないものは新作問題，あるいは入試問題を大幅に改題した問題）．そして，どのようなテーマかがはっきり分かるように，一題ごとにタイトルをつけました（大きなタイトル／細かなタイトル の形式です）．なお，問題のテーマを明確にするため原題を変えたものがありますが，特に断っていない場合もあります．

解答の**前文**として，そのページのテーマに関する重要手法や解法などをコンパクトにまとめました．前文を読むことで，一題の例題を通して得られる理解が鮮明になります．入試直前期にこの部分を一通り読み直すと，よい復習になるでしょう．

解答は，試験場で適用できる，ごく自然なものを採用し，計算は一部の単純計算を除いては，ほとんど省略せずに目で追える程度に詳しくしました．また解答の右側には，傍注（⇦ではじまる説明）で，解答の補足や，使った定理・公式等の説明を行いました．どの部分についての説明かはっきりさせるため，原則として，解答の該当部分にアンダーライン（――）を引きました（容易に分かるような場合は省略しました）．

演習題：　例題と同じテーマの問題を選びました．例題よりは少し難し目ですが，例題の解答や解説，傍注等をじっくりと読みこなせば，解いていけるはずです．最初はうまくいかなくても，焦らずにじっくりと考えるようにしてください．また横の枠囲みをヒントにしてください．

そして，例題の解答や解説を頼りに解いた問題については，時間をおいて，今度は演習題だけを解いてみるようにすれば，一層確実な力がつくでしょう．

演習題の解答：　解答の最初に各問題のランクなどを表の形で明記しました（ランク分けについては前ページを見てください）．その表にはA*，B*○というように*や○マークもつけてあります．これは，解答を完成するまでの受験生にとっての“目標時間”であって，*は1つにつき10分，○は5分です．たとえばB*○の問題は，標準問題であって，15分以内で解答して欲しいという意味です．

ミニ講座：　例題の前文で詳しく書き切れなかった重要手法や，やや発展的な問題に対する解法などを1～2ページで解説したものです．

コラム：　その分野に関連する話題の紹介です．

本書で使う記号など：　上記で，問題の難易や目標時間で使う記号の説明をしました．それ以外では，

⇨**注**は初心者のための，➾**注**はすべての人のための，➡**注**は意欲的な人のための注意事項です．▨は関連する事項の補足説明などです．また，

∴　ゆえに
∵　なぜならば

1対1対応の演習

数学Ⅲ 微積分編 新訂版

目 次

ミニ講座

コラム

極限

極限
要点の整理

1. 数列の極限

1・1　定義

数列 $\{a_n\}$ において，n を大きくするにつれ，a_n の値が一定値 α に限りなく近づくならば，数列 $\{a_n\}$ は α に収束するといい，α を数列 $\{a_n\}$ の極限値という．

数列 $\{a_n\}$ が α に収束することを

$$\lim_{n\to\infty} a_n=\alpha$$

$$a_n\to\alpha\ (n\to\infty)$$

$$n\to\infty \text{ のとき } a_n\to\alpha$$

$$a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \alpha$$

などと書く．

数列が収束しないとき，その数列は発散するという．

$$\begin{cases} \text{収束} & \cdots\cdots\ \lim\limits_{n\to\infty} a_n=\alpha \\ \text{発散} \begin{cases} \text{正の無限大に発散} & \cdots\cdots\ \lim\limits_{n\to\infty} a_n=\infty \\ \text{負の無限大に発散} & \cdots\cdots\ \lim\limits_{n\to\infty} a_n=-\infty \\ \text{振動} & \end{cases} \end{cases}$$

2. 数列の極限に関する基本定理

2・1　数列の極限

$$\lim_{n\to\infty} a_n=\alpha \iff \lim_{n\to\infty}|a_n-\alpha|=0$$

$$\iff b_n=a_n-\alpha \text{ とおくと } \lim_{n\to\infty} b_n=0$$

2・2　演算と極限

数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ が収束して，

$$\lim_{n\to\infty} a_n=\alpha,\ \lim_{n\to\infty} b_n=\beta$$

ならば，

$$\lim_{n\to\infty}(a_n\pm b_n)=\alpha\pm\beta \text{（複号同順）}$$

$$\lim_{n\to\infty} ka_n=k\alpha \text{（}k\text{ は定数）}$$

$$\lim_{n\to\infty} a_nb_n=\alpha\beta$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\frac{\alpha}{\beta} \text{（ただし，}b_n\neq 0,\ \beta\neq 0\text{）}$$

2・3　大小関係と極限

$a_n\leqq b_n$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ が成り立ち（$a_n<b_n$ でもよい），数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ が収束して

$$\lim_{n\to\infty} a_n=\alpha,\ \lim_{n\to\infty} b_n=\beta \text{ ならば } \alpha\leqq\beta$$

である．（なお，☞次頁の例題(4)）

2・4　はさみうちの原理

数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$，$\{c_n\}$ において，

$$b_n\leqq a_n\leqq c_n\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

が成り立ち（$b_n<a_n<c_n$ でもよい），

$$\lim_{n\to\infty} b_n=\lim_{n\to\infty} c_n=\alpha$$

ならば，数列 $\{a_n\}$ も収束して

$$\lim_{n\to\infty} a_n=\alpha$$

2・5　追い出しの原理

数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ において，

$$b_n\leqq a_n\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

$$\text{かつ } \lim_{n\to\infty} b_n=\infty$$

ならば，$\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\infty$

3. 等比数列の極限

3・1　等比数列の収束条件とその極限

初項 a，公比 r の等比数列 $\{ar^{n-1}\}$ が収束するための条件は，

$$a=0 \text{ または } -1<r\leqq 1$$

であり，

$$\lim_{n\to\infty} ar^{n-1}=\begin{cases} 0 & (a=0 \text{ または } -1<r<1) \\ a & (r=1) \end{cases}$$

4. 無限級数の和

4・1　無限級数

数列 a_1，a_2，$\cdots$，a_n，$\cdots\cdots$　のすべての項を形式的に順に ＋ で結んだ

$$a_1+a_2+\cdots+a_n+\cdots\cdots$$

を無限級数といい，記号 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ で表す．

実際には，無限個の項を加えることは不可能なので，無限級数の和を次のように定義する．

4・2　無限級数の和

無限級数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ において，部分和 $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ の作る

数列 $\{S_n\}$ が S に収束するとき，無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は収束するといい，S をこの無限級数の和という．このとき，$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$ と表す．

数列 $\{S_n\}$ が発散するとき，無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は発散する，あるいは和をもたないという．

4・3 無限級数では，勝手にカッコをつけられない

無限級数の和は部分和の極限である．公式が存在する無限等比級数以外では，部分和 S_n を計算し，極限値 $\lim_{n\to\infty} S_n$ を求めるのが基本方針である．

このとき，無限級数に勝手にカッコをつけたりすることは禁物である．例えば，

$$1+(-1)+1+(-1)+1\cdots\cdots \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots①$$

では $a_n=(-1)^{n-1}$ であるが，

$$\{1+(-1)\}+\{1+(-1)\}+\cdots\cdots \quad \cdots\cdots\cdots\cdots②$$

とカッコをつけると $a_n=1+(-1)$ と考えていることになり，全く別物になってしまう．実際，①では

$$S_n=0\ (n：偶数),\ S_n=1\ (n：奇数)$$

であるから，$\lim_{n\to\infty} S_n$ は存在せず，この級数は発散する．一方②では，つねに $S_n=0$ で，$\lim_{n\to\infty} S_n=0$ と収束する．

5. 無限級数の和に関する定理

5・1 無限級数の基本定理

無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$，$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ がそれぞれ S，T に収束するとする．このとき，

1° $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \pm b_n)=S\pm T$（複号同順）

2° $\sum_{n=1}^{\infty} ka_n=kS$（$k$ は定数）

3° $a_n \leqq b_n$（$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$）ならば $S\leqq T$

5・2 無限級数が収束するための必要条件

無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束するならば，$\lim_{n\to\infty} a_n=0$ である．この定理の逆は成立しない．

［証明］ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n=\beta$ とすると，

$$a_n=\sum_{k=1}^{n} a_k-\sum_{k=1}^{n-1} a_k \to \beta-\beta=0\ (n\to\infty)$$

6. 無限等比級数

6・1 無限等比級数の和

$$\left[S_n=\sum_{k=1}^{n} ar^{k-1}=a\cdot\frac{1-r^n}{1-r}\ (r\neq 1)\ \text{であるから} \right]$$

無限等比級数 $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$ は，$a=0$ または $-1<r<1$ の場合に限り収束し，その和 S は

$a=0$ のとき $S=0$

$-1<r<1$ のとき $S=\dfrac{a}{1-r}\ \left(=\dfrac{\text{初項}}{1-\text{公比}}\right)$

（例） 上を使って循環小数を分数に直せる．例えば

$$0.\dot{1}\dot{2}=\frac{12}{100}+\frac{12}{100^2}+\cdots=\frac{12}{100}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{100}}=\frac{12}{99}=\frac{4}{33}$$

7. 正誤判定

極限では，直感が通用しない場合がしばしばある．次の問題を考えてみよう．

例題 次の命題の各々について，正しいか誤っているかを判定し，誤っているものには反例をあげよ．

（1） $\lim_{n\to\infty} b_n=0$ ならば，$\left\{\dfrac{a_n}{b_n}\right\}$ は発散する．

（2） $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ がともに収束し，すべての n について $b_n\neq 0$ であれば，$\left\{\dfrac{a_n}{b_n}\right\}$ は収束する．

（3） $\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)=0$ ならば，$\lim_{n\to\infty} a_n$，$\lim_{n\to\infty} b_n$ が存在し，それらが有限の値で等しい．

（4） $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ がともに収束し，すべての n について $a_n<b_n$ であれば，$\lim_{n\to\infty} a_n<\lim_{n\to\infty} b_n$

（5） a_1，a_2，$\cdots$，a_n の平均を b_n とする．$\{a_n\}$ が発散するならば，$\{b_n\}$ は発散する．

（6） $\lim_{n\to\infty} a_n=0$ ならば，$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ は収束する．

（7） 無限等比数列 $\{a_n\}$ が収束すれば，無限等比級数 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ は収束する．

（8） すべての n について $0<a_n<1$ であれば，$\lim_{k\to\infty} a_1 a_2\cdots a_k=0$ （大阪教育大など）

ミニ講座・1
2^{100} と 100^2 は 26 桁違う

［この章を一通り終えたあと読んで下さい］

極限の計算では，$\dfrac{\infty}{\infty}$ や $\dfrac{0}{0}$ の形がよく出てきます．このような場合，無限大(小)の大きさの感覚を持っておくと，見通しよく計算することができます．ここでは，$x\to\infty$ のとき，∞ に発散する $f(x)$，$g(x)$ について，

$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{g(x)}{f(x)}=1$ のとき $f(x)\fallingdotseq g(x)$

$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{g(x)}{f(x)}=0$ のとき $f(x)\gg g(x)$

と表すことにします．$x\to 0$ のとき 0 に収束する $f(x)$，$g(x)$ についても，$\fallingdotseq$，$\gg$ を上の意味で用います．

1．無限大どうしの比較

x が十分大きいとき，x^3 と x ではもちろん x^3 のほうが大きいのですが，どれくらい大きいのでしょうか．

それには，両者の『比』をとって調べます．

$\dfrac{x^3}{x}=x^2$ だから，x に対して x^3 は，$x=100$ のとき 1 万倍，$x=10000$ のとき 1 億倍，… となり非常に大きく，逆に x は x^3 に比べると塵と化してしまいます．よって，$x\ll x^3$，$x^3+x\fallingdotseq x^3$ と見なして構いません．

次の 2 つの極限は有名です．

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^k}{a^x}=0,\ \lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x^k}=0\quad(a>1，k>0)$$

「a^x から見た x^k，x^k からみた $\log x$ は，無視できるほど小さい」という感覚が大切です．

$$a^{x}\gg x^k\gg{\scriptstyle\log x}$$

と，大きさを変えて書いてもいいくらい差があるのです．

つまり，指数関数 $\gg$ 多項式関数 $\gg$ 対数関数　というわけで，$2^x\gg x^2$ です．$x=100$ のときが表題の場合です．

2^{100} と 100^2 では，2^{100} のほうが遥かに大きいことにピンと来るようにしたいものです．

さて，次の極限（∞/∞ の形）は，もう簡単ですね．

例 $\displaystyle\lim_{t\to\infty}\frac{t\sqrt{1+t^2}}{t^2+\underbrace{(1+\sqrt{1+t^2}\,)\log t}}=\boxed{}$

分母の〰〰$\fallingdotseq(1+t)\log t\fallingdotseq t\underline{\log t}$ で，これは $t^2=t\cdot \underline{t}$ に比べるとほとんど 0．よって，分母$\fallingdotseq t^2$ で，分子$\fallingdotseq t\cdot t$ とから，$\dfrac{t^2}{t^2}=\mathbf{1}$ が極限値です．

きちんと答案にするには，今近似した t^2 で分母分子を割れば，ともに 1 に収束し，1/1 で解決です．

また，$a>b>1$ なら，$a^n+b^n\fallingdotseq a^n$ です．これは $\dfrac{b^n}{a^n}=\left(\dfrac{b}{a}\right)^n\to 0$ から分かります．

2．無限小の場合

無限小（0 に限りなく近い）にも大小があります．x^2 も x^3 も $x\to 0$ のとき 0 に収束するから同じじゃないかとひとくくりにはできません．たとえば $(10^{-10})^2$ と $(10^{-10})^3$ は，どちらも 0 のようなものですが，なんと 10^{10}(＝100 億) 倍違う！ x^2 を x($\fallingdotseq 0$) 倍した x^3 のほうがうんと小さいので，$x^3\ll x^2$，$x^2+x^3\fallingdotseq x^2$ です．

多項式関数に限りません．

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1,\ \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{①}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1,\ \lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{x}=1$$

も利用できます．$x\to 0$ のとき $\sin x\fallingdotseq x$ だから，

$$\frac{\sin 5x}{\sin 3x}\fallingdotseq\frac{5x}{3x}=\frac{5}{3},\ \frac{\sin(\sin x^2)}{x\sin x}\fallingdotseq\frac{\sin x^2}{x\cdot x}\fallingdotseq\frac{x^2}{x^2}=1$$

また，①により，$x\to 0$ のとき，$\cos x$ は $1-\dfrac{1}{2}x^2$ とみなせる（$\cos x-1\fallingdotseq -x^2/2$）ので，

$$\frac{\cos x-\cos 3x}{x^2}\fallingdotseq\frac{\left(1-\frac{1}{2}x^2\right)-\left(1-\frac{1}{2}(3x)^2\right)}{x^2}=4$$

という計算で，極限値の目星がつきます．

3．無限級数で表すと

$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x}{x^3}$ はどうでしょうか．分子$\fallingdotseq x-x=0$ と見なしては，$\dfrac{0}{0}$ の形のままで失敗です．

次の結果が知られています（マクローリン展開といいます．☞p.66）．

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots$$

これによると，$\sin x-x=-\dfrac{x^3}{6}+\dfrac{x^5}{120}-\cdots\cdots$

なので，$x\to 0$ のとき

$$\frac{\sin x-x}{x^3}=-\frac{1}{6}+\frac{x^2}{120}-\cdots\cdots\to-\mathbf{\frac{1}{6}}$$

1 分数形，$\sqrt{\quad}$ などの極限

次の極限値を求めよ．

（１） $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{5x^4+x^2+3}{x^4+3x-2}$ （国士舘大・理工）

（２） $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^3}\left\{\sqrt{1+2x}-\left(1+x-\frac{x^2}{2}\right)\right\}$ （摂南大・工）

（３） $\displaystyle\lim_{x\to -\infty}(\sqrt{x^2+3x}+x)$ （関西大・理工系）

一番強い項でくくる 例えば，$n\to\infty$ のときの $\dfrac{2n^3-10n}{n^3+n^2}$ の極限値を求めてみよう．多項式どうしでは，強さは次数で決まり，$2n^3-10n\fallingdotseq 2n^3$，$n^3+n^2\fallingdotseq n^3$．よって，答えは 2 と分かる．

答案にするには，『一番強い項』n^3 でくくって，$\dfrac{2n^3-10n}{n^3+n^2}=\dfrac{\cancel{n^3}\{2-(10/n^2)\}}{\cancel{n^3}\{1+(1/n)\}}=\dfrac{2-(10/n^2)}{1+(1/n)}\to 2$ とする．n^3 で約分する前は ∞/∞ の不定形であるが，「約分」することで不定形から脱出できる．

分子の有理化 （２）は，{ }を分子と見ると「0/0」の不定形である．分子を有理化すると，「約分」ができて，不定形から脱出できるようになる．（３）は「$\infty-\infty$」の不定形で，分数式ではないが，分母＝1 の分数式と考えて，分子を有理化することがポイントとなる．

$x\to-\infty$ のときの $\sqrt{\quad}$ の極限は，$t\to+\infty$ に直す $X<0$ のとき $\sqrt{X^2}=-X$（マイナスを忘れがち）なので，$x\to-\infty$ の形の極限は間違いやすい．そこで，$x=-t$ とおいて，$t\to\infty$ に直そう．

解 答

（１） $\dfrac{5x^4+x^2+3}{x^4+3x-2}=\dfrac{x^4\left(5+\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{3}{x^4}\right)}{x^4\left(1+\dfrac{3}{x^3}-\dfrac{2}{x^4}\right)}=\dfrac{5+\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{3}{x^4}}{1+\dfrac{3}{x^3}-\dfrac{2}{x^4}}\xrightarrow[x\to\infty]{}\dfrac{5+0+0}{1+0-0}=\mathbf{5}$

⇦『一番強い項』x^4 でくくる．分母・分子の $3x-2$，x^2+3 が極限に影響しない“塵”（ちり）であることがはっきりする．左では，分母・分子を x^4 でくくった後，x^4 で約分したが，慣れてくれば，はじめから約分して，くくるという操作を省略するのもよい．

（２） $\dfrac{1}{x^3}\left\{\sqrt{1+2x}-\left(1+x-\dfrac{x^2}{2}\right)\right\}=\dfrac{(1+2x)-\left(1+x-\dfrac{x^2}{2}\right)^2}{x^3\left\{\sqrt{1+2x}+\left(1+x-\dfrac{x^2}{2}\right)\right\}}$

⇦分子・分母に次式を掛けた．
$\sqrt{1+2x}+\left(1+x-\dfrac{x^2}{2}\right)$

$=\dfrac{1+2x-\left(1+x^2+\dfrac{x^4}{4}+2x-x^3-x^2\right)}{x^3\left\{\sqrt{1+2x}+\left(1+x-\dfrac{x^2}{2}\right)\right\}}=\dfrac{1-\dfrac{x}{4}}{\sqrt{1+2x}+1+x-\dfrac{x^2}{2}}\xrightarrow[x\to 0]{}\mathbf{\dfrac{1}{2}}$

⇦分子を有理化し，x^3 で約分することで，不定形から脱出．

（３） $x=-t$ とおくと，$x\to-\infty$ のとき $t\to\infty$ であり，

$\sqrt{x^2+3x}+x=\dfrac{\sqrt{t^2-3t}-t}{1}=\dfrac{(t^2-3t)-t^2}{\sqrt{t^2-3t}+t}$

$=-\dfrac{3t}{\sqrt{t^2-3t}+t}=-\dfrac{3}{\sqrt{1-\dfrac{3}{t}}+1}\xrightarrow[t\to\infty]{}\mathbf{-\dfrac{3}{2}}$

⇦$\sqrt{t^2-3t}=\sqrt{\left(t-\dfrac{3}{2}\right)^2-\dfrac{9}{4}}$
$\fallingdotseq t-\dfrac{3}{2}$
から，答えの見当をつけることができる．

1 演習題 （解答は p.24）

次の極限値を求めよ．

（１） $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2+(n+2)^2+\cdots+(2n)^2}{1^2+2^2+\cdots+n^2}$ （福岡大・理，医，工）

（２） $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}x(\sqrt{x^2+6x+10}+x+3)$ （駒大・医療健康科学）

（２） まず（ ）を有理化する．

2 r^n（$n\to\infty$）の極限

（1） $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{2^{2n+1}-3^{n+1}}{4^n+2^{n+2}}$ を求めよ．（東京電機大・理工／改題）

（2） r を正の定数とするとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{r^{n-1}-3^{n+1}}{r^n+3^{n-1}}$ を求めよ．（弘前大・理工）

一番強い項でくくる 前問では多項式の極限を考えたが，今度は等比数列 $\{r^n\}$ の極限を考えよう．

これは，∞（$r>1$），1（$r=1$），0（$|r|<1$），±1 で振動（$r=-1$），$\pm\infty$ で振動（$r<-1$）となる．等比数列どうしの場合，$\{a^n\}$ と $\{b^n\}$ について，$|a|>|b|$ なら

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{b^n}{a^n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{b}{a}\right)^n=0$ $\left(\because\ \left|\frac{b}{a}\right|<1\right)$ であるから，b^n は a^n に比べれば塵（ちり）のようなものである．

また，(1)のように指数に $2n$，n タイプが混在しているときは，n にそろえ $2^{2n+1}=2^{2n}\cdot2=2\cdot4^n$ のようにする．すると(1)で一番強い項は，2^{2n+1} と 4^n であるから，4^n でくくる変形を行う．

(2)では，r と 3 の大小で強い項が変わるので，この大小で場合分けをする．

解答

（1）
$$\frac{2^{2n+1}-3^{n+1}}{4^n+2^{n+2}}=\frac{2\cdot4^n-3\cdot3^n}{4^n+4\cdot2^n}$$
$$=\frac{4^n\left\{2-3\left(\frac{3}{4}\right)^n\right\}}{4^n\left\{1+4\left(\frac{2}{4}\right)^n\right\}}=\frac{2-3\left(\frac{3}{4}\right)^n}{1+4\left(\frac{2}{4}\right)^n}\xrightarrow[n\to\infty]{}\frac{2-0}{1-0}=\mathbf{2}$$

⇦$3^{n+1}=3\cdot3^n$ であるから，3^{n+1} と 3^n の強さは同じ．

（2） **$0<r<3$ のとき**，分母・分子を 3^n でくくって，
$$\frac{r^{n-1}-3^{n+1}}{r^n+3^{n-1}}=\frac{3^n\left\{\frac{1}{3}\left(\frac{r}{3}\right)^{n-1}-3\right\}}{3^n\left\{\left(\frac{r}{3}\right)^n+\frac{1}{3}\right\}}=\frac{\frac{1}{3}\left(\frac{r}{3}\right)^{n-1}-3}{\left(\frac{r}{3}\right)^n+\frac{1}{3}}$$
$$\xrightarrow[n\to\infty]{}\frac{0-3}{0+\frac{1}{3}}=\mathbf{-9}$$

$r=3$ のとき，$\displaystyle\frac{r^{n-1}-3^{n+1}}{r^n+3^{n-1}}=\frac{3^{n-1}-3^{n+1}}{3^n+3^{n-1}}=\frac{1-9}{3+1}=\mathbf{-2}$

⇦分母・分子を 3^{n-1} で割った．

$r>3$ のとき，分母・分子を r^n でくくって，
$$\frac{r^{n-1}-3^{n+1}}{r^n+3^{n-1}}=\frac{r^n\left\{\frac{1}{r}-3\left(\frac{3}{r}\right)^n\right\}}{r^n\left\{1+\frac{1}{r}\left(\frac{3}{r}\right)^{n-1}\right\}}=\frac{\frac{1}{r}-3\left(\frac{3}{r}\right)^n}{1+\frac{1}{r}\left(\frac{3}{r}\right)^{n-1}}\xrightarrow[n\to\infty]{}\boldsymbol{\frac{1}{r}}$$

2 演習題（解答は p.24）

（1） 実数 x に対して，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{2-x^{2n}}{1-x-x^{2n+1}}$ を求めよ．（近畿大・理工／一部）

（2） 0 でない実数 x について，極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{x^{n+1}-x^{-n-1}}{x^n+x^{-n}}$ を求めよ．（武蔵工大・工）

どれが一番強い項で，どれが塵のようなものなのかを意識しよう．

極限
演習題の解答

1…A*	2…A**	3…B**
4…B*○	5…A*○	6…B*○B*
7…B**	8…B**	9…B**○
10…A**	11…B**	12…B*○B**
13…B***	14…B**	

1 （1） 分子$=\sum_{k=n+1}^{2n}k^2=\sum_{k=1}^{2n}k^2-\sum_{k=1}^{n}k^2$ と考える．

（2） $x=-t$ とおき，(　)を有理化する．

解 （1） $\dfrac{(n+1)^2+(n+2)^2+\cdots+(2n)^2}{1^2+2^2+\cdots+n^2}$

$$=\frac{\{1^2+2^2+\cdots+(2n)^2\}-(1^2+2^2+\cdots+n^2)}{1^2+2^2+\cdots+n^2}$$

$$=\frac{\frac{1}{6}\cdot 2n(2n+1)(4n+1)-\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)}{\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)}$$

$$=\frac{2(2n+1)(4n+1)-(n+1)(2n+1)}{(n+1)(2n+1)}$$

［分母・分子を n^2 で割って］

$$=\frac{2\left(2+\frac{1}{n}\right)\left(4+\frac{1}{n}\right)-\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)}{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)}$$

$$\to\frac{2\cdot 2\cdot 4-1\cdot 2}{1\cdot 2}=\mathbf{7}\ (n\to\infty)$$

（2） $x=-t$ とおくと，$x\to-\infty$ のとき $t\to\infty$ であり

$$x(\sqrt{x^2+6x+10}+x+3)$$

$$=-t\{\sqrt{t^2-6t+10}-(t-3)\}$$

$$=-t\cdot\frac{(t^2-6t+10)-(t-3)^2}{\sqrt{t^2-6t+10}+(t-3)}$$

$$=-t\cdot\frac{1}{\sqrt{t^2-6t+10}+(t-3)}$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{1-\frac{6}{t}+\frac{10}{t^2}}+1-\frac{3}{t}}\to-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\ (t\to\infty)$$

2 （1） $|x|$ と1の大小で場合分けする．

（2） $|x|$ と $|x^{-1}|$ の大小で場合分けする．

解 （1） $|x|<1$，すなわち $\boldsymbol{-1<x<1}$ **のとき**，

$$\frac{2-x^{2n}}{1-x-x^{2n+1}}\xrightarrow[n\to\infty]{}\frac{2-0}{1-x-0}=\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{1-x}}$$

$\boldsymbol{x=1}$ **のとき**，$\dfrac{2-x^{2n}}{1-x-x^{2n+1}}=\dfrac{2-1}{1-1-1}=\mathbf{-1}$

$\boldsymbol{x=-1}$ **のとき**，$\dfrac{2-x^{2n}}{1-x-x^{2n+1}}=\dfrac{2-1}{1+1+1}=\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}$

$|x|>1$，すなわち $\boldsymbol{x<-1}$ **または** $\boldsymbol{1<x}$ **のとき**，

$$\frac{2-x^{2n}}{1-x-x^{2n+1}}=\frac{\frac{2}{x^{2n}}-1}{\frac{1-x}{x^{2n}}-x}\xrightarrow[n\to\infty]{}\frac{0-1}{0-x}=\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{x}}$$

（2） $A=\dfrac{x^{n+1}-x^{-n-1}}{x^n+x^{-n}}$ とおく．

（$x\neq0$ のとき，$|x|>|x^{-1}|\iff|x|>\dfrac{1}{|x|}$

$\iff|x|^2>1\iff|x|>1$ に注意して場合分けする）

$|x|<1$，すなわち $\boldsymbol{-1<x<1}$ **のとき**（$x\neq0$），

A の分母・分子に x^n を掛けて，$A=\dfrac{x^{2n+1}-x^{-1}}{x^{2n}+1}$ …①

よって，$A\xrightarrow[n\to\infty]{}\dfrac{0-x^{-1}}{0+1}=-\dfrac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{x}}$

$\boldsymbol{x=1}$ **のとき**，$A=\dfrac{1-1}{1+1}=\mathbf{0}$

$\boldsymbol{x=-1}$ **のとき**，①により，$A=\dfrac{-1+1}{1+1}=\mathbf{0}$

$|x|>1$，すなわち $\boldsymbol{x<-1}$ **または** $\boldsymbol{1<x}$ **のとき**，

A の分母・分子を x^n で割って，

$$A=\frac{x-x^{-2n-1}}{1+x^{-2n}}\xrightarrow[n\to\infty]{}\frac{x-0}{1+0}=\boldsymbol{x}$$

3 （2） ここでは，まず $\lim_{\theta\to0}\dfrac{1-\cos\theta}{\theta^2}=\dfrac{1}{2}$ を用意しておく．（3）（4）でもこれを使うことにする．

解 （1） 分母・分子を x で割ると，

$$\frac{\frac{\sin2x+\sin4x}{x}}{\frac{\sin3x+\sin5x}{x}}=\frac{\frac{\sin2x}{2x}\cdot2+\frac{\sin4x}{4x}\cdot4}{\frac{\sin3x}{3x}\cdot3+\frac{\sin5x}{5x}\cdot5}$$

$$\xrightarrow[x\to0]{}\frac{2+4}{3+5}=\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{4}}$$

（2） $\dfrac{1-\cos\theta}{\theta^2}=\dfrac{(1-\cos\theta)(1+\cos\theta)}{\theta^2(1+\cos\theta)}$

$$=\left(\frac{\sin\theta}{\theta}\right)^2\cdot\frac{1}{1+\cos\theta}\to\frac{1}{2}\ (\theta\to0)$$

であるから，与式の分母・分子を x^2 で割って，