はじめに

私は合格した瞬間の喜びを，数十年たった今も鮮明に覚えている．どちらであれ，結果は淡々と受けとめようと決めていたけれど，御殿下グラウンドの端に設置された掲示板で受験番号を見つけた瞬間に走り出していた．止まって〜という声が二三度聞こえ，自分に向けられているようだと気づいて振り返った．息を切らせながら裸足で追いかけてきた袴姿の美しい女性が，私に荷物を手渡してくれた．手提げ袋から折りたたみの傘や，いろいろなものをばらまきながら走ったらしい．一番で赤門前の公衆電話ボックスに飛び込み，家に電話した．合格したよと，母に告げた．振り返ると行列ができていた．ボックスを出て見上げると，花霞の空が輝いていた．

入学後，すぐに受験雑誌「大学への数学」の添削を始めた．添削した生徒達の合否が気になって，数年は，発表を見に行った．翌年から三四郎池の際に掲示板が戻った．東大新聞を買い，喧噪の傍らで，おめでとうと残念だを，心の中で繰り返した．

東大入試を見つめ始めて 40 年が過ぎようとしている．最近は高校や塾から「東大合格者を増やしたいが何をすればよいか」という相談を受けることも多い．

東大は学歴社会日本にあって，最大の難関である．私の生徒も，毎年数多く挑み，その何割かは目的を果たさずに敗れ去っていく．最近は得点開示をする．2 点不足で不合格というのはざらで，中には 0.2 点足らず不合格という生徒もいた．合否のライン上にひしめき合っているに違いない．

その天と地ほどの違いを分けているのはなんだろうかと思う．学力低下が叫ばれて久しい．それに対して東大入試は難問を堅持している．ほとんど解けないで帰ってくる生徒達の少しでも力になりたいと願う．手強い相手だが，効果的な方法が何かあるに違いないと思う．

まず，生徒と東大の問題の距離を測らねばならないと，いろいろな場所で生徒達に問題を解いてもらい，その答案を分析し，どんなことに気をつけたら合格に届くのかを考えた．

その結果をもとに，少しでも合格に有益な情報を提供したいと思って本書を書いた．本書の中で徐々に語っていきたい．受験生のみならず，指導者の方にも，対策の参考になることを願っている．

安田　亨

【本書の利用法】

◆対象

東大を志望する文系受験生，および，東大志望者を指導する教師．

受験生の場合は，東大に憧れを持つ人すべてが本書の対象です．

◆本書の執筆の姿勢

「東大数学で 1 点でも多く取る方法」という刺激的な書名です．super な方法が書いてあって，本書を読めばたちどころに得点を拾い集めることができるわけでは，むろん，ありません．そのための，**地道で確実な方法**を書きました．

大人は経験もあり，間違いやすいところは巧みに避けます．時間の制約もないため，他の人と相談し，他の大人に批判されないように厳密な解答を書きます．そうした解答は生徒諸君が普段勉強するには適していないのではないかと考えました．

生徒が普通にアプローチする解法で，間違いやすいポイント，混乱しやすいポイントで，どう切り抜けたらよいかを解説した本を提供したいと考えました．

まず，生徒が間違いやすいポイントを見るために生徒達に解いてもらいました．彼らの答案を見て，必要性を感じたことは，たとえ超基本であっても説明しています．また，計算ミスをしやすい場面では計算の仕方も解説しました．解法は多くの生徒がとるもので，正解に達する可能性が高いものです．生徒の手が着かない問題は，少しでも部分点が取れるアプローチの仕方を解説しています．

全国規模の総合模試の問題を作成する際には，文系の場合には登場する文字の個数を減らし，変数と定数の混乱が起こらないようにするのが普通です．学習到達度を測ることが主目的なので「見たことがある問題」を多く入れます．しかし，東大数学は逆です．文字を多くして混乱を狙い，「よくある問題」と思って始めると経験したこともないほどの困難な場合分けで差をつけます．他大学とは一線を画した傾向です．過去問を解いて，文字の多さ，場合分けの多さに慣れてください．

◆大学の採点の体制とそれを考慮した答案の書き方

噂です．不確かな部分もあり，今後体制が変わる可能性もありますが，批判を恐れずにあえて書いてみます．的外れなら笑い飛ばしてください．現在，多くの大学が「通し」で採点をします．東大にあてはめてみれば，文科 I 類の第一問の答案すべてを A 先生と B 先生のペアが採点と検閲を行う形です．文科は各類定員 350 名から 460 名程度です．2 次試験は 3 倍で行われます．1000 枚から 1300 枚ほどを一週間程度の間に読まなければなりません．単純化し，仮に 7 日で 1300 枚，一日 10

時間採点をするとして，1時間で20枚，1枚に3分程度しか掛けられない計算です．実行のためには次の点が重要です．ときどき白紙に近い答案がある．採点のポイントがはっきりしている．皆が0点では困るし，皆が満点でも困る．

この場合，以下の点に注意して答案を書くことが重要です．

（ア） 字は綺麗に見やすく書く訓練をせよ．順序よく書き，簡潔な日本語で適度な説明を入れ，最後の答えは下線を引いて目立つようにする．

（イ） 最後の答えが合わない限り高得点は望めないし，答えがあってさえいれば，減点されることは少ない．論証しにくい場合には，厳密さにこだわらず答えを書く．

（ウ） 見たことがない問題では完答は難しい．解き切ってから答案用紙に清書をしようとすると0点になる危険性が高い．だから，答案用紙を何段かに区切って，どうしても試行錯誤が必要なら右下のあたりで行い，可能な限り，答案本体に書く．**完答を目指さず，部分点を取ることが最大の目的**と考える．まず，題意を確実に式に表現する．正しい方向だと思えることは書く．

◆学習方法

まず問題編を見てください．考えるのが好きな人は粘って考えてください．あなたにとって，数学は考えるものです．後で見直そうという甘い考えでなく計算は一発で決めてください．書き上げたら，見直して（やっぱり見直す！）甘い点はないか厳しくチェックしてください．解答編を見て，下手な部分，計算ミスを補正し，よりよい解答を作り上げます．

解けないなら，解答編を読んでください．あなたにとって，数学は覚えるものです．解答を読み，理解できたら，問題編を見て解答を再現します．再現できたら，早く書く練習をします．**普段の勉強では，様々な解法を理解し，道具の幅を広げ**ます．ただし序列をつけ，自分にとって最良の解法を確定します．うまい解法でなく，安全な解法で着実な計算力を身につけます．本書を反復し解法を定着させます．一書の人恐るべし（一冊の本を完璧にこなすことが実力をつける王道である）．

「数学は暗記科目だ」とか「数学は考えるものだ」とか，人それぞれ，いろいろなことを言います．しかし，決定版などありません．受験生の数だけの勉強の仕方があります．どんな方法であれ，一生懸命やれば，合格に必要な力は身につきます．

◆第5版に際して

第4版から2006年以前の分を削除し，主に2007年から2021年までを取り上げています．ただし，2次方程式が手薄になるため，96年の問題を1題収録しています．

東大数学で1点でも多く取る方法
―文系編―

第5版

目　次

数と式など

問題 1 a, b, c, d を正の数とする．不等式

$$\begin{cases} s(1-a)-tb>0 \\ -sc+t(1-d)>0 \end{cases}$$

を同時にみたす正の数 s, t があるとき，2 次方程式

$$x^2-(a+d)x+(ad-bc)=0$$

は $-1<x<1$ の範囲に異なる 2 つの実数解をもつことを示せ．

（96　東大・文科／第 2 問（共通））

問題 2 座標平面上の点 (x, y) が次の方程式を満たす．

$$2x^2+4xy+3y^2+4x+5y-4=0$$

このとき，x のとりうる最大の値を求めよ．

（12　東大・文科／第 1 問）

問題 3　O を原点とする座標平面上に点 A$(-3, 0)$ をとり，$0^\circ < \theta < 120^\circ$ の範囲にある θ に対して，次の条件（ｉ），（ii）をみたす 2 点 B，C を考える．

（ｉ）　B は $y > 0$ の部分にあり，OB$= 2$ かつ $\angle$AOB$= 180^\circ - \theta$ である．

（ii）　C は $y < 0$ の部分にあり，OC$= 1$ かつ $\angle$BOC$= 120^\circ$ である．

ただし △ABC は O を含むものとする．以下の問（１），（２）に答えよ．

（１）　△OAB と △OAC の面積が等しいとき，θ の値を求めよ．

（２）　θ を $0^\circ < \theta < 120^\circ$ の範囲で動かすとき，△OAB と △OAC の面積の和の最大値と，そのときの $\sin\theta$ の値を求めよ．

（10　東大・文科／第 1 問）

問題 4　1 辺の長さが 1 の正六角形 ABCDEF が与えられている．点 P が辺 AB 上を，点 Q が辺 CD 上をそれぞれ独立に動くとき，線分 PQ を 2：1 に内分する点 R が通りうる範囲の面積を求めよ．

（17　東大・文科／第 2 問）

問題 2 座標平面上の点 (x, y) が次の方程式を満たす．

$$2x^2+4xy+3y^2+4x+5y-4=0$$

このとき，x のとりうる最大の値を求めよ．

（12　東大・文科／第 1 問）

考え方 「x のとりうる最大の値を求める」からといって，与式から x について解いてしまうと数学 III の関数が出てきます．

$$2x^2+2x(2y+2)+3y^2+5y-4=0$$

$$x=\frac{-(2y+2)\pm\sqrt{(2y+2)^2-2(3y^2+5y-4)}}{2}$$

$$=\frac{-(2y+2)\pm\sqrt{-2(y^2+y-6)}}{2}$$

これが定義できるのは $-2(y^2+y-6)\geqq 0$，すなわち $y^2+y-6\leqq 0$ のときです．数学 III の微分法を知っていれば微分して x の最大値を調べることができます．x について解いたから y の取る値の範囲が得られました．逆に y についての 2 次方程式と見て解けば，x の取る値の範囲が得られます．

$$3y^2+(4x+5)y+2x^2+4x-4=0$$

$$y=\frac{-(4x+5)\pm\sqrt{(4x+5)^2-12(2x^2+4x-4)}}{6}$$

$$=\frac{-(4x+5)\pm\sqrt{-(8x^2+8x-73)}}{6}$$

となります．通常はここまで解かず，ルートの中だけを抜き出して考えます．

解答 与式を y について整理し

$$3y^2+(4x+5)y+2x^2+4x-4=0$$

判別式を D とする．このような実数 y が存在するために x の満たす必要十分条件は

$$D=(4x+5)^2-12(2x^2+4x-4)=-(8x^2+8x-73)\geqq 0$$

$$8x^2+8x-73\leqq 0$$

ここで

$$8x^2+8x-73=0$$

を解くと

$$x=\frac{-4\pm\sqrt{16+584}}{8}=\frac{-2\pm\sqrt{150}}{4}=\frac{-2\pm5\sqrt{6}}{4}$$

$$\frac{-2-5\sqrt{6}}{4}\leqq x\leqq\frac{-2+5\sqrt{6}}{4}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots①$$

x の最大値は $\boldsymbol{\dfrac{-2+5\sqrt{6}}{4}}$

注意 **1°【逆を考える】** $y=\dfrac{-(4x+5)\pm\sqrt{-(8x^2+8x-73)}}{6}$ ⋯⋯⋯②

で $-(8x^2+8x-73)<0$ だと y が虚数になり，実数 y が存在しません．
$-(8x^2+8x-73)\geqq 0$ だと y が実数になります．

このように x の取る値の範囲を求める方法として「実数 y が存在するために x の満たす必要十分条件を求める」という考え方があります．逆手流といいます．

2°【係数を小さくする】

$$8x^2+8x-73=0$$

を解くとき，皆さんは間違えないと思いますが，年を取るとだんだんこういう計算が怪しくなります．係数を中に組み込んで

$$2(2x)^2+2\cdot2(2x)-73=0$$

$$2x=\frac{-2\pm\sqrt{2^2-2\cdot(-73)}}{2}=\frac{-2\pm\sqrt{150}}{2}$$

とすると少し安心です．

3°【整数問題】

東大は逆手流が好きですが，もっと素直な出題なら整数問題にすることができます．

$$2x^2+4xy+3y^2+4x+5y-4=0$$

を満たす整数 $x,\,y$ の組 $(x,\,y)$ を求めよ．

解答は簡単です．② と解くのは自然であり，x は ① を満たすから，$\sqrt{6}=2.4\cdots$ で近似計算すると $-3.\cdots\leqq x\leqq 2.\cdots$ と分かります．$x=-3,\,-2,\,-1,\,0,\,1,\,2$ を代入して y が整数になるものを求めます．$(x,\,y)=\boldsymbol{(-3,\,2),\,(2,\,-3)}$ となります．計算は自分でやってください．

問題3　Oを原点とする座標平面上に点 $A(-3, 0)$ をとり，$0° < \theta < 120°$ の範囲にある θ に対して，次の条件（ｉ），（ii）をみたす2点B，Cを考える．

（ｉ）Bは $y > 0$ の部分にあり，$OB = 2$ かつ $\angle AOB = 180° - \theta$ である．

（ii）Cは $y < 0$ の部分にあり，$OC = 1$ かつ $\angle BOC = 120°$ である．

ただし $\triangle ABC$ はOを含むものとする．以下の問（１），（２）に答えよ．

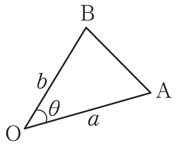
（１）$\triangle OAB$ と $\triangle OAC$ の面積が等しいとき，θ の値を求めよ．

（２）θ を $0° < \theta < 120°$ の範囲で動かすとき，$\triangle OAB$ と $\triangle OAC$ の面積の和の最大値と，そのときの $\sin\theta$ の値を求めよ．

（10　東大・文科／第1問）

考え方　（１）三角形の面積の公式 $\triangle OAB = \dfrac{1}{2}ab\sin\theta$

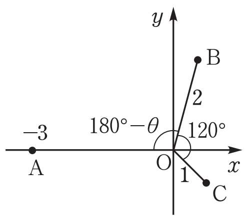
（ただし $OA = a$，$OB = b$，$\angle AOB = \theta$）を使うだけです．



解答　（１）$\angle AOB + \angle BOC = 180° - \theta + 120° = 300° - \theta$

だから

$$\angle AOC = 360° - (300° - \theta) = \theta + 60°$$

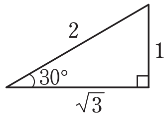


$$\triangle OAB = \frac{1}{2}\cdot 3\cdot 2\cdot\sin(180° - \theta) = 3\sin\theta$$

$$\triangle OAC = \frac{1}{2}\cdot 3\cdot 1\cdot\sin(\theta + 60°) = \frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}\sin\theta + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta\right)$$

$$= \frac{3}{4}\sin\theta + \frac{3\sqrt{3}}{4}\cos\theta$$

となり △OAB ＝ △OAC のとき



$$3\sin\theta = \frac{3}{4}\sin\theta + \frac{3\sqrt{3}}{4}\cos\theta$$

$$\frac{9}{4}\sin\theta = \frac{3\sqrt{3}}{4}\cos\theta$$

$$\tan\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$0° < \theta < 120°$ より $\boldsymbol{\theta = 30°}$

（**2**） $S = \triangle\mathrm{OAB} + \triangle\mathrm{OAC}$ とおくと

$$S = \frac{15}{4}\sin\theta + \frac{3\sqrt{3}}{4}\cos\theta = \frac{3}{4}(5\sin\theta + \sqrt{3}\cos\theta)$$

$$= \frac{3}{4}\sqrt{28}\sin(\theta + \alpha)$$

と合成できる．ただし，α は

$$\cos\alpha = \frac{5}{2\sqrt{7}},\ \sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{7}},\ 0° < \alpha < 90°$$

を満たす角である．$0° < \theta < 120°$ より $\alpha < \theta + \alpha < 120° + \alpha$ だから，

$$\alpha < 90° < 120° + \alpha$$

は成り立つ．S は $\theta + \alpha = 90°$ のときに最大値 $\boldsymbol{\frac{3\sqrt{7}}{2}}$ をとる．このとき

$$\sin\theta = \sin(90° - \alpha) = \cos\alpha = \boldsymbol{\frac{5\sqrt{7}}{14}}$$

注意 **【合成について】**$a^2 + b^2 \neq 0$ のとき

$$a\sin\theta + b\cos\theta = \sqrt{a^2 + b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}\sin\theta + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}\cos\theta\right)$$

となり，

$$\cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}},\ \sin\alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

となる α を用いて

$$a\sin\theta + b\cos\theta = \sqrt{a^2 + b^2}\,(\sin\theta\cos\alpha + \cos\theta\sin\alpha)$$
$$= \sqrt{a^2 + b^2}\sin(\theta + \alpha)$$

と合成できます．

▶あとがき◀

本書は安田が原稿を書き，受験雑誌「大学への数学」編集部の坪田三千雄と飯島康之が読んで意見を言い，検討するという手順をとりました．元来が大雑把な性格の上に，生徒に合わせるというコンセプトで始めているため，問題を解く上で支障のない厳密さは排除したいという方針でした．両氏の指摘は鋭く，厳密な記述に変更するか，提供されるうまい別解を入れるかどうかなど，かなり検討を重ねました．安田の悪態に耐え，何度も読んで校正してくれた忍耐力は賞賛に値します．

本書は組版システムTeXを用いて作成されています．デザインを東京出版の岸澤康雄が担当し，それに基づいてスタイルファイルをTeXコンサルタントの吉永徹美氏に作成していただきました．TeXのceo.styを用いています．ceo.styは吉永氏のご指導のもとに安田と友人の岡本寛氏で作成したものです．奥村晴彦教授（三重大学）の主宰されているTeX Q&Aで多くの示唆を得ました．安田がWordで作成した原稿をTeXファイルに直す膨大な作業を，吉松祐三子先生（横浜共立学園中学校・高等学校）にお願い致しました．最終的には安田がタイプセットして，pdfで印刷所に入稿しています．かわいいイラストを駿台の生徒だった西川英先生（トキワ松学園中学・高等学校）が描いてくれました．また，多くの生徒達が実験台となり，貴重な情報を提供してくれました．皆様に感謝致します．

目標を見つけたら少々の困難にはめげない心の強さを与えてくれた両親に感謝致します．本書を出版する許可を与えていただいた現社長と浦辺理樹編集長に感謝致します．

東京出版のおかげで勉強のきっかけと生きる尊厳すら得ることができました．今は亡き先代社長の黒木正憲先生と奥様には，一層の感謝を致します．　　　（平成21年４月）

東大数学で1点でも多く取る方法　文系編　［第5版］

平成21年５月15日　第１版 第１刷発行　　定価はカバーに表示してあります。
平成24年６月30日　増補版 第１刷発行
平成26年10月30日　第３版 第１刷発行
平成30年12月15日　第４版 第１刷発行
令和３年８月17日　第５版 第１刷発行

著　者　安田　亨
発行者　黒木美左雄
発行所　株式会社　東京出版
〒150-0012　東京都渋谷区広尾 3-12-7
電話 03-3407-3387　振替 00160-7-5286
https://www.tokyo-s.jp/
印刷所　光陽メディア
製本所　技秀堂製本部

落丁･乱丁の場合は、ご連絡下さい。送料弊社負担にてお取り替えいたします。

ISBN978-4-88742-254-4